

УДК 539.3

С.А. Гусейнов, канд. техн. наук

Азербайджанский архитектурно-строительный университет, Баку, Азербайджан

Тел.: (+99412) 4932384; E-mail: safar.huseynov65@mail.ru

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК

В предлагаемой статье исследуется задача о нелинейном колебании трехслойных прямоугольных пластинок, слои которых изготовлены из различных непрерывно неоднородных материалов. Используя гипотезы Кирхгофа-Лява для всей толщины элемента, получены системы уравнений движения пластиинки с учетом геометрической нелинейности. С помощью метода Бубнова-Галеркина определены амплитудно-частотные характеристики пластиинки.

Ключевые слова: трехслойные пластиинки, нелинейные колебания, метод Бубнова-Галеркина, амплитудно-частотные характеристики.

Введение

Различные задачи об устойчивости и колебании одно- и многослойных пластиин и оболочек, изготовленных из однородно упругих материалов, в современной научной литературе освещены достаточно [1-3]. Однако научные исследования в этой области, когда конструкции изготовлены из неоднородных материалов и рассматриваются геометрически нелинейные задачи, редко встречаются в литературе.

Как известно, последнее время интенсивно развивается производство композитных материалов, поскольку изготовление различных конструкций из этих материалов намного выгодно, чем использование тяжелых металлических конструкций. Во многих случаях композитные материалы обладают свойствами неоднородности. В работах [4-9] исследованы некоторые вопросы об устойчивости и колебании слоистых пластиинок из неоднородных композитных материалов в геометрически линейной постановке. Однако в этих работах в основном были рассмотрены узкие специальные виды неоднородностей.

Поэтому в данной статье дается общая постановка задачи исследования нелинейных колебаний трехслойных прямоугольных пластиинок, слои которого изготовлены из различных неоднородно упругих материалов.

Постановка задачи

Рассмотрим трехслойную прямоугольную пластиинку, изготовленную из неоднородно упругого материала. Координатная система выбрана следующим образом: оси ОХ и ОY расположены в срединной плоскости, среднего слоя пластиинки, ось ОZ – направлена перпендикулярно им.

Связь между компонентами напряжений и деформаций на основе обобщенного закона Гука имеет вид:

$$\sigma_{11}^i = \lambda_{11}^i \varepsilon_{11} + \lambda_{12}^i \varepsilon_{22}, \sigma_{22}^i = \lambda_{21}^i \varepsilon_{11} + \lambda_{22}^i \varepsilon_{22}, \sigma_{12}^i = \lambda_{33}^i \varepsilon_{12}, (i=1,2,3) \quad (1)$$

Здесь предполагается, что упругие характеристики материала слоев являются непрерывными функциями координаты толщины, т.е.:

$$\lambda_{ij}^k = \lambda_{ij}^{k'} \cdot a_i^k(z)$$

Используем гипотезу Кирхгофа-Лява для всей толщины элемента пластиинки:

$$\varepsilon_{11} = e_{11} - zx_{11}, \quad \varepsilon_{22} = e_{22} - zx_{22}, \quad \varepsilon_{12} = e_{12} - zx_{12} \quad (2)$$

где e_{11}, e_{22}, e_{12} – деформации и x_{11}, x_{22}, x_{12} – бесконечно малые изменения кривизны срединной плоскости.

Компоненты усилий и моментов вычисляются по формулам:

$$T_{ij} = \int_{-h_1-h/2}^{-h/2} \sigma_{ij}^1 dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^2 dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \sigma_{ij}^3 dz, \quad (3)$$

$$M_{ij} = \int_{-h_1-h/2}^{-h/2} \sigma_{ij}^1 z dz + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^2 z dz + \int_{h/2}^{h/2+h_2} \sigma_{ij}^3 z dz$$

где h_1, h_2 и h – толщины соответствующих слоев. С учетом (1), (2) из (3) получим:

$$T_{11} = \bar{\lambda}_{11}^2 \cdot A_{11}^0 \cdot e_{11} + \bar{\lambda}_{12}^2 \cdot A_{12}^0 \cdot e_{22} - \bar{\lambda}_{11}^2 \cdot A_{11}^1 \cdot x_{11} - \bar{\lambda}_{12}^2 \cdot A_{11}^0 \cdot x_{22}, \quad (4)$$

$$M_{11} = \bar{\lambda}_{11}^2 \cdot A_{11}^1 \cdot e_{11} + \bar{\lambda}_{12}^2 \cdot A_{11}^1 \cdot e_{22} - \bar{\lambda}_{11}^2 \cdot A_{11}^2 \cdot x_{11} - \bar{\lambda}_{12}^2 \cdot A_{12}^2 \cdot x_{22}, \quad (5)$$

В этих формулах A_{ij}^k – обобщенные жесткостные характеристики.

Как известно [1], уравнения движения прямоугольных пластинок состоит из следующих:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} = \frac{\gamma_1 h_1 + \gamma h + \gamma_2 h_2}{g} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} = \frac{\gamma_1 h_1 + \gamma h + \gamma_2 h_2}{g} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + T_{11} x_{11} + 2 T_{12} x_{12} + T_{22} x_{22} = \frac{\gamma_1 h_1 + \gamma h + \gamma_2 h_2}{g} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (7)$$

Здесь $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ – удельные весы материала слоев, g – ускорение силы тяжести, u, v, w – перемещения точек срединной плоскости по направлениям x, y, z – соответственно.

Используем связь между деформациями и кривизнами с компонентами перемещений с учетом геометрической нелинейности:

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad e_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$x_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad x_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad x_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (8)$$

С учетом (4), (5), (8) из (6), (7) получается система нелинейных уравнений движения относительно перемещений рассматриваемой пластиинки в общем виде:

$$L_i(U_j) = \frac{\gamma_1 h_1 + \gamma h + \gamma_2 h_2}{g} \cdot \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (u_j = u, v, w). \quad (9)$$

Здесь L_i – полученные нелинейные дифференциальные операторы.

Следует отметить, что деформации срединной плоскости пластиинки должны удовлетворять уравнению совместности деформации:

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (10)$$

В общем виде, решение системы уравнений (9) связано с большими математическими трудностями. Поэтому в практике часто используется приближенная постановка задачи. В этом случае предполагается, что в системе (6) можно отбросить

инерционные силы. Тогда эти уравнение будут удовлетворены тождественно если ввести функцию напряжений F - следующими соотношениями :

$$T_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad T_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad T_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (11)$$

Для преобразования уравнений (7), (10) необходимому виду, надо выразить e_{ij} через T_{ij} и x_{ij} из соотношений (4). Тогда после некоторых преобразований из (4) находим:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \alpha_{11}T_{11} + \alpha_{12}T_{22} + b_{11}x_{11} + b_{12}x_{22}, \\ e_{22} &= \alpha_{21}T_{11} + \alpha_{22}T_{22} + b_{21}x_{11} + b_{22}x_{22}, \\ e_{12} &= \alpha_{33}T_{12} + b_{33}x_{12}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) в выражениях (5) для моментов получим:

$$\begin{aligned} M_{11} &= r_{11}T_{11} + r_{12}T_{22} + R_{11}x_{11} + R_{12}x_{22} \\ M_{22} &= r_{21}T_{11} + r_{22}T_{22} + R_{21}x_{11} + R_{22}x_{22}, \\ M_{12} &= r_{33}T_{12} + R_{33}x_{12} \end{aligned} \quad (13)$$

В этих формулах коэффициенты a_{ij} , b_{ij} , r_{ij} , R_{ij} – выражаются через обобщенные жесткостные характеристики.

Подставляя выражении (12), (13) в уравнениях (7) и (10) после некоторых преобразований получим следующую систему уравнений о нелинейных колебаниях рассматриваемой пластинки :

$$d_1 \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) + d_2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + d_3 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + d_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + L_1(w, F) = \frac{\gamma_1 h_1 + \gamma h + \gamma_2 h_2}{g} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (14)$$

$$D_1 \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) + D_2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + D_3 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + D_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{1}{2} L_1(w, F). \quad (15)$$

Здесь d_i и D_i – выражаются через обобщенные жесткостные характеристики пластиинки и через L_1 – обозначен следующий нелинейный оператор:

$$L_1(\varphi, \tau) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y}. \quad (16)$$

Таким образом, в приближенной постановке задачи уравнения нелинейных колебаний трехслойной неоднородной пластиинки получены в виде (14) и (15).

Метод решения задачи

Рассмотрим задачу о нелинейных колебаниях пластиинки при одностороннем сжатии. При шарнирном закреплении краев квадратной пластиинки для прогиба можно принять выражение:

$$W = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{a}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в уравнение (15), частный интеграл ее можно представит в виде,

$$F_1 = A \cos^2 \frac{\pi x}{a} + B \cos^2 \frac{\pi y}{a} + C \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{a}, \quad (18)$$

где введены обозначения:

$$A = B = \frac{f^2}{32\alpha_{11}}, \quad C = \gamma_0 f, \quad \gamma_0 = -\frac{\beta_{11} + \beta_{12} - \beta_{33}}{\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{33}}. \quad (19)$$

Решение однородного уравнения (15) будет:

$$F_2 = -\frac{py^2}{2}.$$

Тогда общее решение уравнения (15) будет иметь вид:

$$F = F_1 + F_2 = A \cos^2 \frac{\pi x}{a} + B \cos^2 \frac{\pi y}{a} + C \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{a} - \frac{py^2}{2} \quad (20).$$

Уравнение (14) будем решать методом Бубнова-Галеркина:

$$\int_0^a \int_0^b L \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{a} dx dy = 0$$

где через L – обозначена левая часть уравнения (14). Подставляя (17) и (20) в (21), после некоторых преобразований, окончательное дифференциальное уравнение, описывающее нелинейные собственные колебания рассматриваемой пластиинки, получается в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\sigma^*}{K_B^*} \right) \mathcal{O}(\xi) = 0, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{f(t)}{h_1}, \quad \tau = \omega t, \quad \omega_0^2 = \pi^2 \sigma_B^* \frac{c_0 h^2}{a^4}, \\ \sigma^* &= \frac{\sigma}{E_{10}} \left(\frac{a}{h_1} \right)^2, \quad \sigma_B^* = \frac{\sigma_B}{E_{10}} \left(\frac{a}{h_1} \right)^2, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E_{10} g}{\gamma_1 + \gamma_2 \frac{h_2}{h_1}}}, \\ \varphi(\xi) &= \frac{1}{\pi^2 (\sigma_B^* - \sigma^*)} \left(\bar{A}_{,1} \xi + \bar{A}_{,2} \xi^2 + \bar{A}_{,3} \xi^3 \right), \\ \bar{A}_1 &= -\frac{4}{h_1} \left\{ \frac{\pi^2}{4} \sigma^* h_1 + \frac{\pi^4}{2 E_{10} h_1^2} (d_3 + d_4) + \frac{\pi^2}{2} \frac{d_1}{E_{10} h_1^2} + \frac{\pi^4}{2} \gamma_0 \frac{d_2}{E_{10} h_1^2} \right\}, \\ \bar{A}_2 &= -4 \left\{ -d_1 \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{\alpha_{11} E_{10} h_1^2} + \frac{3}{8} \pi^2 \frac{\gamma_0}{E_{10} h_1^2} \right\}, \\ \bar{A}_3 &= \frac{1}{8} \frac{\pi^4}{\alpha_{11} E_{10} h_1^2}. \end{aligned}$$

Перейдем к исследованию амплитудно-частотных зависимостей для рассматриваемой пластиинки. Принимая приближенное решение уравнения (22) в виде:

$$\zeta = A \cdot \cos \tau,$$

и удовлетворяя условию ортогональности, ? периода функции $\cos \omega t$ после некоторых преобразований получим:

$$\nu^2 = \frac{1}{\pi^2 (\sigma_B^* - \sigma^*)} \left(\bar{A}_1 + \frac{8}{3\pi} \bar{A}_2 \cdot A + \frac{3}{4} \bar{A}_1 \cdot A^2 \right), \quad (23)$$

где

$$\nu^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2(1 - \frac{\sigma^*}{\sigma_B})}.$$

Численные расчеты, функции неоднородности материала слоев, принимают следующий вид:

$$\alpha_{11}^1(z) = 1 + \mu_1 \frac{z}{h_1},$$

$$\alpha_{11}(z) = 1 + \mu \frac{z}{h},$$

$$\alpha_{11}^2(z) = 1 + \mu_2 \frac{z}{h_2}.$$

Результаты численных расчетов представлены на рис 1.

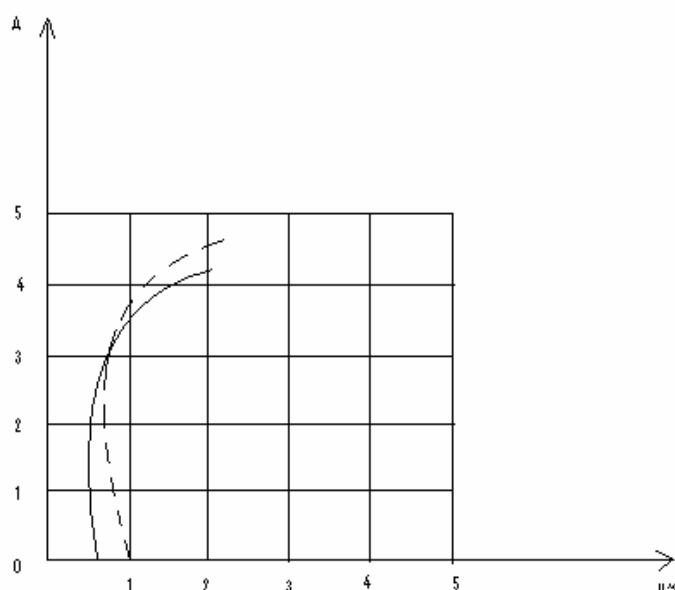


Рис.1. Амплитудно-частотные характеристики пластиинки

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0.2, \mu_1 = \mu_2 = \mu = 1$$

На рис.1 построен график зависимости амплитудно-частотной характеристики пластиинки на основе формулы (23). Здесь пунктирной линией отмечено решение аналогичной однородной задачи.

Заключение

Анализ проведенных численных расчетов показывает, что учет неоднородности свойства материала слоев может существенно влиять на поведение конструкции в геометрически нелинейных задачах.

Список литературы:

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. - М.: Наука. - 1967. - 984 с.
2. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел / В.А. Ломакин. - М.: изд-во МГУ. - 1978.- 245 с.

3. Алфутов Н.А. Расчеты многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. - М.: Машиностроение. - 1984.- 264 с.
4. Rajasekaran S., Nalinaa K. Stability and Vibration analysis of non-prismatic thin-walled composite spatial members of generic section // International Journal of Structural Stability, and Dynamics.- 2005.- vol.5.- №4.- P.489-520.
5. Pentaras D., Elishakoff I. Polar Orthotropic Inhomogeneous Circular plates: Vibration Tailoring // J.Appl.Mechanics.- 2010.- vol.77. - N3. - P.310-319.
6. Arshad S.H. Vibration analysis of bilayered FGM cylindrical shells / Arshad S.H., Naeem M.N., Sultana N., Shah A.G., Iqbal Z. // J.Appl.Mechanics. - 2011.- vol.81.- N8.- P.319-343.
7. Free vibration of symmetric angle-ply laminated cylindrical shells of variable thickness / K.K.Viswanathan, Jang Hyun Lee, Zainal Abdul Aziz // J.Acta Mechanica.- 2011.- Vol.221.- N10.- P.309-319.
8. Alibeigloo A. Free vibration analysis of nano-plate using three-dimensional theory of elasticity // J.Acta Mechanica.- 2011.- Vol.222.- N11.- P.149-159.
9. Li Peng, Yang Yiren, Xu Wei, Chen Guo. On the aeroelastic stability and bifurcation structure of subsonic nonlinear thin panels subjected to external excitation // J.Arch.Appl.Mech. - 2012.- Vol.82.- P.1251-1267.
10. Free vibration analysis of laminated composite plates with elastically restrained edges using FEM / Avades K.Sharma, N.D.Mittal // Central European Journal of Engineering.- 2013.- Vol.3.- N.2.- P.306-315.
11. Dynamic analysis of damping in layered and welded beams / Bhagat Singh, Bijoy Kumar Nanda // J.Engineering Structures.- 2013.- Vol. 48.- P. 10-20.
12. Nonlinear buckling and post-buckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under external pressure / Dao Van Dung, Le Kha Hoa // J.Thin-Walled Structures.- 2013.- Vol. 63.- P. 117-124.

Надійшла до редакції 14.01.2014

С.А. Гусейнов

НЕЛІНІЙНІ КОЛІВАННЯ ТРИШАРОВИХ НЕОДНОРІДНИХ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИНОК

У статті досліджується задача про нелінійне коливання тришарових прямокутних пластинок, шари яких виготовлені з різних безперервно неоднорідних матеріалів. Використовуючи гіпотези Кірхгофа-Лява для всієї товщини елемента, отримані системи рівнянь руху пластинки з урахуванням геометричної нелінійності. За допомогою методу Бубнова-Гальоркіна визначені амплітудно-частотні характеристики пластинки.

Ключові слова: тришарові пластинки, нелінійні коливання, метод Бубнова-Гальоркіна, амплітудно-частотні характеристики.

S.A. Huseynov

NON-LINEAR VIBRATIONS OF THREE-LAYER NONHOMOGENEOUS RECTANGULAR PLATES

The problem about non-linear vibration of three-layer rectangular plates under seismic impact is investigated, the layers of which are made of various continuously nonhomogeneous materials. Using Kirchhoff-Lyav hypothesis for all the thickness of an element, we obtained the systems of the equations of movement of a plate taking into account geometrical nonlinearity. By means of Bubnov-Galyorkin method we found peak-frequency characteristics of a plate.

Keywords: three-layer plates, non-linear vibrations, peak-frequency characteristics.