УДК 621.833

В.Н. Стрельников, д - р техн. наук, проф.
Г.С. Суков, канд. эконом. наук, **М.Г. Суков**
ПАО Новокраматорский машиностроительный завод, Украина
Тел./факс: 38 (06264) 7 – 22 – 49; E-mail: rs@nkmz.donetsk.ua

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО – ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДИСКА ГЕНЕРАТОРА ВОЛН КРУПНОЙ ВОЛНОВОЙ ПЕРЕДАЧИ

Представлены результаты теоретической оценки напряженно – деформированного состояния диска с центральным отверстием применительно к условиям нагрузки дискового генератора волн крупной волновой передачи. Напряженное состояние представлено функцией напряжений, удовлетворяющей бигармоническому уравнению упругости, решения которого отыскиваем в виде ряда по косинусам. Для постановки краевых задач внешняя нагрузка представлена в форме тригонометрических рядов. Решение системы уравнений, из которой определяются коэффициенты разложения в ряды компонент тензора напряжений, находим в форме Крамера.

Ключевые слова: *диск, тензор, напряжения, деформация, нагрузка, ряд*

1.Введение

При проектировании редукторов стремятся к обеспечению минимальных габаритов, массы, звуковой мощности, трудоемкости производства, минимизации мощности двигателя, при обеспечении требуемых скоростей и моментов. В наибольшей степени приведенным условиям отвечают волновые редукторы, имеющие минимальные масса – габаритные характеристики, низкую звуковую мощность и трудоемкость производства, высокие к.п.д. и нагрузочную способность [1, 2].

Под влиянием нефтяного кризиса к машинам и оборудованию стали предъявлять жесткие требования по экономии энергетических и сырьевых ресурсов. В связи с этим волновые передачи стали быстро внедряться в качестве компактных легких редукторов. В настоящее время все больше производителей осваивают изготовление стандартных серий волновых редукторов общего и специального назначения. Это свидетельствует об увеличении спроса на них в различных областях.

Масштабный фактор оказывает негативное влияние на технические характеристики крупных волновых редукторов. Большие деформации гибкого колеса приводят к интерференции зубьев второго рода, снижению к.п.д. и нагрузочной способности, заклиниванию и проскоку зубьев, возникают большие по величине осевые силы [3, 4].

ПАО НКМЗ проводит научно – исследовательскую работу, связанную с адаптацией волновых передач к условиям тяжелого машиностроения. В частности решены задачи теории упругости по оценке напряженно – деформированного состояния высоконагруженных элементов крупных волновых передач [5].

Диски генератора волн участвуют в передаче вращения между быстроходным валом, где они смонтированы с заданным эксцентриситетом, и тихоходным звеном, в качестве которого используется гибкое колесо. Диски эксцентрично установленные на быстроходном валу служат основным источником колебаний. Снижение массы дисков генератора волн, при одновременном обеспечении их нагрузочной способности, приобретает особую актуальность для крупных волновых передач.

2. Основное содержание и результаты работы

Оптимизация конструкции дисков из условия минимизации массы и достаточности нагрузочной способности выполняется решением задачи теории упругости о напряженно – деформированном состоянии диска с центральным цилиндрическим отверстием. Диск имеет два активных соосных цилиндрических контура, по которым приложены распределенные нагрузки.

На наружный контур радиусом R_2 через гибкое колесо передается реактивная составляющая нормальной нагрузки зубчатого зацепления в пределах угла $2\theta^*$. Угол θ^* охватывает сектор зубьев находящихся в одновременном зацеплении по одну сторону относительно большой оси. Нормальную нагрузку на наружном контуре P_2 аппроксимируем параболическим законом

$$P_2 = \begin{cases} P_{2\,max}\left(1-\dfrac{\theta^2}{\theta^{*2}}\right); & |\theta| \le \theta^*; \\ 0; & |\theta| > \theta^*. \end{cases} \qquad (1)$$

где $P_{2_{max}} = \dfrac{3M_2 tg\alpha}{4\theta^* b R_2^2}$; $M_2 = \dfrac{4P_{2_{max}} b R_2^2 \theta^*}{3tg\alpha}$ – вращающий момент на тихоходном валу; α - угол зацепления; b – толщина диска; θ - текущее значение угловой координаты.

Распределение нормальной нагрузки на внутреннем контуре диска P_1 в интервале $0 \le \theta \le \pi/2$ примем по параболическому закону, что соответствует распределению нагрузки между телам качения подшипника

$$P_1(\theta) = \begin{cases} P_{1_{max}}\left(1-\dfrac{4\theta^2}{\pi^2}\right) & 0 \le |\theta| \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \dfrac{\pi}{2} < |\theta| \le \pi. \end{cases} \qquad (2)$$

Давление $P_{1_{max}}$ найдем из условия равенства равнодействующих сил для нагрузок по внутреннему и внешнему контурам

$$P_{1_{max}} = \frac{\pi^2\left(Sin\theta^* - \theta^* Cos\theta^*\right)}{4\beta\left(\theta^*\right)^2} P_{2_{max}}. \qquad (3)$$

где $\beta = \dfrac{R_1}{R_2}$.

Напряженное состояние диска представим через функцию напряжений $\phi(r, \theta)$, удовлетворяющую бигармоническому уравнению:

$$\Delta \cdot \Delta\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right) = 0. \qquad (4)$$

Учитывая четность внешней нагрузки, решения уравнения (4) отыскиваем в виде ряда по косинусам

$$\phi(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(r)Cos\,n\theta. \quad (5)$$

Решение уравнения (4) представим в форме Мичелла

$$\phi(r,\theta)=B_0r^2+C_0\ln r+D_0r^2\ln r+E_0+\left(A_1r^3+B_1r\ln r+\frac{C_1}{r}+D_1r\right)Cos\theta+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(C_{1n}r^n+C_{2n}r^{n+2}C_{3n}r^{-n}+C_{4n}r^{-(n-2)}\right)Cosn\theta. \quad (6)$$

Компоненты тензора напряжений определяются через функцию напряжений

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2};\qquad \sigma_\theta=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2};\qquad \tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right). \quad (7)$$

С учетом выражений (6) и (7) найдем компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_r=\left[(2B_0+D_0)\frac{C_0}{r^2}+2D_0\ln r+D_0\right]+\left(2A_1r+\frac{B_1+2B}{r}-\frac{2C_1}{r^3}\right)\cdot Cos\theta-\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)C_{1n}\cdot r^{n-2}+\right.$$
$$\left.+(n-2)(n+1)C_{2n}r^n+n(n+1)C_{3n}r^{-(n+2)}+(n+2)(n-1)C_{4n}r^{-n}\right]\cdot Cosn\theta,$$
$$\sigma_\theta=\left(2B_0-\frac{C_0}{r^2}+2D_0\ln r+3D_0\right)+\left(6A_1r+\frac{B_1}{r}+\frac{2C_1}{r^3}\right)\cdot Cos\theta+\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)C_{1n}\cdot r^{n-2}+\right.$$
$$\left.+(n+2)(n+1)C_{2n}r^n+n(n+1)C_{3n}r^{-(n+2)}+(n+2)(n-1)C_{4n}r^{-n}\right]\cdot Cosn\theta, \quad (8)$$
$$\tau_{r\theta}=\left(2A_1r+\frac{B_1}{r}-\frac{2C_1}{r^3}\right)\cdot Sin\,\theta+\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)C_{1n}r^{n-2}+n(n+1)C_{2n}r^n-\right.$$
$$\left.-n(n+1)C_{3n}r^{-(n+2)}-n(n-1)C_{4n}r^{-n}\right]\cdot Sin\,n\theta.$$

Получим условие совместности деформаций

$$(1-\nu)B+2B_1=0. \quad (9)$$

Для постановки краевых задач внешнюю нагрузку представим в форме тригонометрических рядов по косинусам в интервале $-\pi\le\theta\le\pi$. Для наружного контура

$$P_2(\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nCosn\theta. \quad (10)$$

Интегрируя уравнение (10) в пределах *[0; π]*, получим

$$a_0 = P_{2max}\cdot\frac{2\theta^*}{3\pi}; \qquad a_n = \frac{4P_{2max}}{\pi\theta^{*2}n^2}\cdot\left(\frac{1}{n}Sinn\theta^* - \theta^* Cosn\theta^*\right).$$

Подставив a_o, a_n в уравнение (10) получим разложение Фурье

$$P_2(\theta) = \frac{2\theta^*}{3\pi}P_{2max} - \frac{4P_{2max}}{\pi\theta^{*2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\theta^* Cosn\theta^* - \frac{1}{n}Sinn\theta^*\right)Cosn\theta. \qquad (11)$$

Из выражения (11) с учётом значений (2) и (3) получим разложение внешней нагрузки для внутреннего контура, если P_{2max} и положить $\theta^*=\pi/2$:

$$P_1(\theta) = \frac{1}{3}P_{1max} - \frac{16P_{1max}}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{\pi}{2}Cos\frac{\pi n}{2} - \frac{1}{n}Sin\frac{\pi n}{2}\right)Cosn\theta. \qquad (12)$$

Коэффициенты разложений тензора напряжений определим из граничных условий:

$$\sigma_r(r=R_2)=-P_2; \quad \sigma_r(r=R_1)=-P_1; \quad \tau_{rQ}(r=R_2)=0; \quad \tau_{rQ}(r=R_1)=0. \qquad (13)$$

Подставим в формулы граничных условий выражения σ_r и $\tau_{r\theta}$ при $r=R_1$ и $r=R_2$ из формул (8); учитывая $D_0 = 0$, а также соотношение (9), получим:

$$\left(2Bo+\frac{Co}{R_2^2}\right)+\left(2A_1R_2-\frac{2C_1}{R_2^3}+\frac{1}{2}(3+\nu)\frac{B}{R_2}\right)Cos\theta-\sum_{n=2}^{\infty}\Big[n(n-1)C_{1n}R_2^{n-2}+(n-2)\times$$

$$\times(n+1)C_{2n}R_2^n+n(n+1)C_{3n}R_2^{-(n+2)}+(n+2)(n-1)C_{4n}R_2^{-n}\Big]Cosn\theta=-\frac{2\theta^*}{3\pi}P_{2max}+$$

$$+\frac{4P_{2max}}{\pi\theta^{*2}}(\theta^* Cos\theta^*-Sin\theta^*)Cos\theta+\frac{4P_{2max}}{\pi\theta^{*2}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\theta^* Cosn\theta^*-\frac{1}{2}Sinn\theta^*\right)Cosn\theta;$$

$$\left(2Bo+\frac{Co}{R_1^2}\right)+\left(2A_1R_1-\frac{2C_1}{R_1^3}+\frac{1}{2}(3+\nu)\frac{B}{R_1}\right)Cos\theta-\sum_{n=2}^{\infty}\Big[n(n-1)C_{1n}R_2^{n-2}+(n-2)\times$$

$$\times(n+1)\cdot C_{1n}R_1^n+n(n+1)C_{3n}R_1^{-(n+2)}+(n+2)(n-1)C_{4n}R_1^{-n}\Big]Cosn\theta=-\frac{1}{3}P_{1max}-$$

$$-\frac{16}{\pi^3}P_{1max}Cos\theta+\frac{16}{\pi^3}P_{1max}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{\pi}{2}Cos\frac{\pi n}{2}-\frac{1}{n}Sin\frac{\pi n}{2}\right)Cosn\theta; \qquad (14)$$

$$\left(2A_1R_2-\frac{2C_1}{R_2^3}-\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{B}{R_2}\right)Sin\theta+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[n(n-1)C_{1n}R_2^{n-2}+n(n+1)C_{2n}R_2^n-$$

$$-n(n+1)C_{3n}R_2^{-(n+2)}-n(n-1)C_{4n}R_2^{-n}\Big]Sinn\theta=0;$$

$$\left(2A_1R_1-\frac{2C_1}{R_1^3}-\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{B}{R_1}\right)Sin\theta+\sum_{n=2}^{\infty}\Big[n(n-1)C_{1n}R_1^{n-2}+n(n+1)C_{2n}R_1^n-$$

$$-n(n+1)C_{3n}R_1^{-(n+2)}-n(n-1)C_{4n}R_1^{-n}\Big]Sinn\theta=0.$$

Из равенств (14) следует система уравнений, из которой находим коэффициенты разложения в ряды компонент тензора напряжений. При *n = 0*

$$B_0=\frac{P_{2\,max}}{6\left(1-\beta^2\right)}\left[\left(Sin\,\theta^*-\theta^*\,Cos\,\theta^*\right)\left(\frac{\pi}{2\theta^*}\right)^2\cdot\beta-\frac{2\theta^*}{\pi}\right];$$

$$C_0=\frac{P_{2max}R_2^2\cdot\beta}{3\left(1-\beta^2\right)}\left[\frac{2\theta^*\beta}{\pi}-\left(\frac{\pi}{2\theta^*}\right)^2\left(Sin\theta^*-\theta^*Cos\theta^*\right)\right];$$

$$B=\frac{2P_{2\,max}R_2\left(\theta^*\,Cos\,\theta^*-Sin\,\theta^*\right)}{\pi\theta^{*2}}=\frac{8P_{1\,max}R_1}{\pi^3};\qquad(15)$$

$$A_1=\frac{\left(1-\nu\right)\left(\theta^*\,Cos\,\theta^*-Sin\,\theta^*\right)P_{2\,max}}{2\pi\theta^{*2}\left(1+\beta^2\right)R_2};$$

$$C_1=\frac{\left(1-\nu\right)\left(\theta^*\,Cos\,\theta^*-Sin\,\theta^*\right)\beta^2P_{2\,max}R_2^3}{2\pi\theta^{*2}\left(1+\beta^2\right)}..$$

При $n\geq 2$ из уравнений (14) получим новую систему уравнений:

$$n\left(n-1\right)C_{1n}R_2^{n-2}+\left(n-2\right)\left(n+1\right)C_{2n}R_2^{n}+n\left(n+1\right)C_{3n}R_2^{-(n+2)}+$$
$$+\left(n+2\right)\left(n-1\right)C_{4n}R_2^{-n}=-\frac{4P_{2\,max}}{\pi\theta^{*2}}\left(\theta^*Cosn\,\theta^*-\frac{1}{n}Sinn\,\theta^*\right)\cdot\frac{1}{n^2};$$
$$n\left(n-1\right)C_{1n}R_2^{n-2}+n\left(n+1\right)C_{2n}R_2^{n}-n\left(n+1\right)C_{3n}R_2^{-(n+2)}-n\left(n-1\right)C_{4n}R_2^{-n}=0;\qquad(16)$$
$$n(n-1)C_{1n}R_1^{n-2}+(n-2)(n+1)C_{2n}R_1^{n}+n(n+1)C_{3n}R_1^{-(n+2)}+(n+2)(n-1)C_{4n}R_1^{-n}=$$
$$=-\frac{16}{\pi^3}\left(\frac{\pi}{2}Cos\frac{\pi n}{2}-\frac{1}{n}Sin\frac{\pi n}{2}\right)\frac{1}{n^2}P_{1max}=-\frac{4}{\pi n^2\beta\theta^{*2}}\left(\theta^*Cos\theta^*-Sin\theta^*\right)\left(\frac{\pi}{2}Cos\frac{\pi n}{2}-\frac{1}{n}Sin\frac{\pi n}{2}\right);$$
$$n\left(n-1\right)C_{1n}R_1^{n-2}+n\left(n+1\right)C_{2n}R_1^{n}-n\left(n+1\right)C_{3n}R_1^{-(n+2)}-n\left(n-1\right)C_{4n}R_1^{-n}=0;$$

В системе уравнений (16) введем новые константы:

$$C_{1n}=\frac{2P_{2\,max}}{\pi\theta^{*\,2}R_2^{n-2}}\cdot\frac{b_{1n}}{n^2\left(n-1\right)};\qquad C_{2n}=-\frac{2P_{2\,max}}{\pi\theta^{*\,2}R_2^{n}}\cdot\frac{b_{2n}}{n^2\left(n+1\right)};$$
$$C_{3n}=\frac{2P_{2\,max}R_1^{n+2}}{\pi\theta^{*\,2}}\cdot\frac{b_{3n}}{n^2\left(n+1\right)};\quad C_{4n}=-\frac{2P_{2\,max}R_1^{n}}{\pi\theta^{*\,2}}\cdot\frac{b_{4n}}{n^2\left(n-1\right)}.\qquad(17)$$

Подставим значения (17) в уравнения (16)

$$b_{1n}-\left(1-\frac{2}{n}\right)b_{2n}+\beta^{n+2}b_{3n}-\left(1+\frac{2}{n}\right)\beta^n b_{4n}=\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}Sinn\theta^*-\theta^*Cosn\theta^*\right)=g_{1n};$$
$$b_{1n}-b_{2n}-\beta^{n+2}b_{3n}+\beta^n b_{4n}=0;$$
$$\beta^{n-2}b_{1n}-\left(1-\frac{2}{n}\right)\beta^n b_{2n}+b_{3n}-\left(1+\frac{2}{n}\right)b_{4n}=-\frac{2}{n}\left(\theta^*Cos\theta^*-Sin\theta^*\right)\left(\frac{1}{n}Sin\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{2}Cos\frac{\pi n}{2}\right)=g_{3n};\qquad(18)$$
$$\beta^{n-2}b_{1n}-\beta^n b_{2n}-b_{3n}+b_{4n}=0.$$

Решение системы (18) находим в форме Крамера

$$b_{1n} = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_n}; \quad b_{2n} = \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n}; \quad b_{3n} = \frac{\Delta_{3n}}{\Delta_n}; \quad b_{4n} = \frac{\Delta_{4n}}{\Delta_n}; \qquad (19)$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -\left(1-\frac{2}{n}\right) & \beta^{n+2} & -\left(1-\frac{2}{n}\right)\beta^{n} \\ 1 & -1 & -\beta^{n+2} & \beta^{n} \\ \beta^{n-2} & -\left(1-\frac{2}{n}\right)\beta^{n} & 1 & -\left(1+\frac{2}{n}\right) \\ -\beta^{n-2} & -\beta^{n} & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{1n} = \begin{vmatrix} g_{1n} & -\left(1-\frac{2}{n}\right) & \beta^{n+2} & -\left(1+\frac{2}{n}\right)\beta^{n} \\ 0 & -1 & -\beta^{n+2} & \beta^{n} \\ g_{3n} & -\left(1-\frac{2}{n}\right)\beta^{n} & 1 & -\left(1+\frac{2}{n}\right) \\ 0 & -\beta^{n} & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{2n} = \begin{vmatrix} 1 & g_{1n} & \beta^{n+2} & -\left(1+\frac{2}{n}\right)\beta^{n} \\ 1 & 0 & -\beta^{n+2} & \beta^{n} \\ \beta^{n-2} & g_{3n} & 1 & -\left(1+\frac{2}{n}\right) \\ \beta^{n-2} & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{3n} = \begin{vmatrix} 1 & -\left(1-\frac{2}{n}\right) & g_{1n} & -\left(1+\frac{2}{n}\right)\beta^{n} \\ 1 & -1 & 0 & \beta^{n} \\ \beta^{n-2} & -\left(1-\frac{2}{n}\right)\beta^{n} & g_{3n} & -\left(1+\frac{2}{n}\right) \\ \beta^{n-2} & -\beta^{n} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{4n} = \begin{vmatrix} 1 & -\left(1-\frac{2}{n}\right) & \beta^{n+2} & g_{1n} \\ 1 & -1 & -\beta^{n+2} & 0 \\ \beta^{n-2} & -\left(1+\frac{2}{n}\right)\beta^{n} & 1 & g_{3n} \\ \beta^{n-2} & -\beta^{n} & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Найдем значения определителей Δ_n, Δ_{1n}, Δ_{2n}, Δ_{3n}, Δ_{4n} :

$$\Delta_n = \frac{4}{n^2}\left[\left(1-\beta^{2n}\right)^2 - n^2\beta^{2n-2}\left(1-\beta^2\right)^2\right];$$

$$\Delta_{1n} = 2g_{1n}\left[\left(1-\beta^2\right)\cdot\beta^{2n} + \frac{1}{n}\left(1-\beta^{2n}\right)\right] - 2g_{3n}\beta^n\left[\left(1-\beta^2\right) + \frac{1}{n}\left(1-\beta^{2n}\right)\cdot\beta^2\right];$$

$$\Delta_{2n} = 2g_{1n}\cdot\left\{-\left(1-\beta^2\right)\cdot\beta^{2n-2} + \frac{1}{n}\left(1-\beta^{2n}\right)\right\} - 2g_{3n}\cdot\beta^n\left\{(1-\beta^2) + \frac{1}{n}(1-\beta^{2n})\right\}; \qquad (20)$$

$$\Delta_{3n} = 2g_{1n}\cdot\beta^{n-2}\left[\left(1-\beta^2\right) + \frac{1}{n}\left(1-\beta^{2n}\right)\right] - 2g_{3n}\left[\left(1-\beta^2\right)\cdot\beta^{2n-2} + \frac{1}{n}\left(1-\beta^{2n}\right)\right];$$

$$\Delta_{4n} = 2g_{1n}\cdot\beta^{n-2}\left[\left(1-\beta^2\right) + \frac{1}{n}\beta^2\left(1-\beta^{2n}\right)\right] - 2g_{3n}\left[\left(1-\beta^2\right)\cdot\beta^{2n} + \frac{1}{n}\left(1-\beta^{2n}\right)\right].$$

Заменяя g_{1n} и g_{3n} из формул (18) найдем Δ_{1n}, Δ_{2n}, Δ_{3n}, Δ_{4n}:

$$\Delta_{1n} = \frac{4}{n^2}\left[\left(1-\beta^{2n}\right) + \left(1-\beta^2\right)n\beta^{2n}\right]\cdot\left(\frac{Sin\, n\theta^*}{n} - \theta^* Cos\, n\theta^*\right) -$$
$$-\frac{4\beta^n}{n^2}\left[\left(1-\beta^2\right)n + \left(1-\beta^{2n}\right)\beta^2\right]\left(Sin\,\theta^* - Cos\,\theta^*\right)\cdot\left(\frac{Sin\frac{\pi n}{2}}{n} - \frac{\pi}{2}Cos\frac{\pi n}{2}\right);$$

$$\Delta_{2n} = \frac{4}{n^2}\left[\left(1-\beta^{2n}\right) + \left(1-\beta^2\right)n\beta^{2n-2}\right]\cdot\left(\frac{Sin\; n\theta^*}{n} - \theta^* Cos\; n\theta^*\right) -$$
$$-\frac{4\beta^n}{n^2}\left[\left(1-\beta^2\right)n + \left(1-\beta^{2n}\right)\right]\left(Sin\;\theta^* - \theta^* Cos\;\theta^*\right)\cdot\left(\frac{Sin\;\frac{\pi n}{2}}{n} - \frac{\pi}{2}Cos\;\frac{\pi n}{2}\right);$$

$$\Delta_{3n} = \frac{4}{n^2}\beta^{n-2}\left[\left(1-\beta^2\right)n + \left(1-\beta^{2n}\right)\right]\cdot\left(\frac{Sin\, n\theta^*}{n} - \theta^* Cos\, n\theta^*\right) - \qquad (21)$$
$$-\frac{4}{n^2}\left[\left(1-\beta^2\right)n\beta^{2n-2} + \left(1-\beta^{2n}\right)\right]\cdot\left(Sin\theta^* - \theta^* Cos\theta^*\right)\cdot\left(\frac{Sin\frac{\pi n}{2}}{n} - \frac{\pi}{2}Cos\, n\theta^*\right);$$

$$\Delta_{4n} = \frac{4}{n^2}\beta^{n-2}\left[\left(1-\beta^2\right)n + \beta^2\left(1-\beta^{2n}\right)\right]\cdot\left(\frac{Sin\, n\theta^*}{n} - \theta^* Cos\, n\theta^*\right) -$$
$$-\frac{4}{n^2}\left[\left(1-\beta^2\right)n\beta^{2n} + \left(1-\beta^{2n}\right)\right]\left(Sin\theta^* - \theta^* Cos\theta^*\right)\cdot\left(\frac{Sin\frac{\pi n}{2}}{n} - \frac{\pi}{2}Cos\, n\frac{\pi n}{2}\right).$$

По формулам (19 – 21) находим коэффициенты b_{1n}, b_{2n}, b_{3n}, b_{4n}

$$b_{1n}=\frac{1}{\left[\left(1-\beta^{2n}\right)^2-n^2\cdot\beta^{2n-2}\left(1-\beta^2\right)^2\right]}\left\{\left[\left(1-\beta^{2n}\right)+\left(1-\beta^2\right)n\beta^{2n}\right]\left(\frac{Sin\,n\theta^*}{n}-\theta^*Cos\,n\theta^*\right)-\right.$$

$$\left.-\beta^{n}\cdot\left[\left(1-\beta^2\right)\cdot n+\left(1-\beta^{2n}\right)\cdot\beta^2\right]\left(Sin\theta^*-\theta^*\cdot Cos\theta^*\right)\cdot\left(\frac{Sin\frac{\pi n}{2}}{n}-\frac{\pi}{2}Cos\frac{\pi n}{2}\right)\right\};$$

$$b_{2n}=\frac{1}{\left[\left(1-\beta^{2n}\right)^2-n^2\cdot\beta^{2n-2}\left(1-\beta^2\right)^2\right]}\left\{\left[\left(1-\beta^{2n}\right)+\left(1-\beta^2\right)n\beta^{2n-2}\right]\left(\frac{Sin\,n\theta^*}{n}-\theta^*Cos\,n\theta^*\right)-\right.$$

$$\left.-\beta^{n}\cdot\left[\left(1-\beta^2\right)\cdot n+\left(1-\beta^{2n}\right)\right]\cdot\left(Sin\theta^*-\theta^*\cdot Cos\theta^*\right)\cdot\left(\frac{Sin\frac{\pi n}{2}}{n}-\frac{\pi}{2}Cos\frac{\pi n}{2}\right)\right\};$$

$$b_{3n}=\frac{1}{\left[\left(1-\beta^{2n}\right)^2-n^2\cdot\beta^{2n-2}\left(1-\beta^2\right)^2\right]}\left\{\left[n\beta^{n-2}\left(1-\beta^{2n}\right)+\left(1-\beta^{2n}\right)\right]\left(\frac{Sin\,n\theta^*}{n}-\theta^*Cos\,n\theta^*\right)-\right. \quad (22)$$

$$\left.-\left[\left(1-\beta^2\right)\cdot n\beta^{2n-2}+\left(1-\beta^{2n}\right)\right]\cdot\left(Sin\theta^*-\theta^*\cdot Cos\theta^*\right)\cdot\left(\frac{Sin\frac{\pi n}{2}}{n}-\frac{\pi}{2}Cos\,n\theta^*\right)\right\};$$

$$b_{4n}=\frac{1}{\left[\left(1-\beta^{2n}\right)^2-n^2\cdot\beta^{2n-2}\left(1-\beta^2\right)^2\right]}\left\{\left[n\beta^{n-2}\left(1-\beta^{2n}\right)+\beta^2\left(1-\beta^{2n}\right)\right]\left(\frac{Sin\,n\theta^*}{n}-\theta^*Cos\,n\theta^*\right)-\right.$$

$$\left.-\left[\left(1-\beta^2\right)\cdot n\beta^{2n}+\left(1-\beta^{2n}\right)\right]\cdot\left(Sin\theta^*-\theta^*\cdot Cos\,\theta^*\right)\cdot\left(\frac{Sin\frac{\pi n}{2}}{n}-\frac{\pi}{2}Cos\,n\theta^*\right)\right\}.$$

Составим выражения для расчета компонент тензора напряжений. Предварительно, пользуясь формулами (9) и (15) найдем:

$$B_1=-\frac{(1-\nu)}{2}\beta=-\frac{(1-\nu)(\theta^*Cos\,\theta^*-Sin\,\theta^*)}{\pi\,\theta^{*2}}P_{2\,max}\cdot R_2;$$

$$B_1+2B=\frac{1}{2}(3+\nu)B=\frac{(3+\nu)(\theta^*Cos\,\theta^*-Sin\,\theta^*)}{\pi\,\theta^{*2}}P_{2\,max}\cdot R_2. \quad (23)$$

Воспользуемся формулами (8), полагаем в них $D=0$; заменяем B_1 и (B_1+2B) по формулам (23), постоянные B_o, C_o, A_1, C_1 по формулам (15), вместо $C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n}$ введем постоянные $b_{1n}, b_{2n}, b_{3n}, b_{4n}$ по формулам (17)

$$\sigma_r=-\frac{P_{2max}}{3\left(1-\beta^2\right)}\left\{\left(\frac{\pi}{2\theta^*}\right)^2\left(Sin\theta^*-\theta^*Cos\theta^*\right)\left\langle\left[\left(\frac{R_2}{r}\right)^2-1\right]\beta+\frac{2\theta^*}{\pi}\left[1-\beta^2\left(\frac{R_2}{r}\right)^2\right]\right\rangle\right\}+$$

$$+\frac{P_{2max}\left(\theta^* Cos\theta^* - Sin\theta^*\right)}{\pi\theta^{*2}}\left[\frac{(1-\nu)}{1+\beta^2}\left(\frac{r}{R_2}\right)+\frac{(1-\nu)\beta^2}{1+\beta^2}\left(\frac{R_2}{r}\right)^3+(3+\nu)\left(\frac{R_2}{r}\right)\right]Cos\theta-$$

$$+\frac{2P_{2max}}{\pi\theta^{*2}}\sum_{n=2}^{\infty}\left[b_{1n}\left(\frac{r}{R_2}\right)^{n-2}-\left(1-\frac{2}{n}\right)b_{2n}\left(\frac{r}{R_2}\right)^{n}+b_{3n}\left(\frac{R_1}{r}\right)^{n+2}-\left(1-\frac{2}{n}\right)b_{4n}\left(\frac{R_1}{r}\right)^{n}\right]\cdot\frac{Cos\,n\theta}{n};$$

$$\sigma_\theta=-\frac{P_{2max}}{3\left(1-\beta^2\right)}\left\{\left(\frac{\pi}{2\theta^*}\right)^2\left(Sin\theta^*-\theta^* Cos\theta^*\right)\left\langle\left[\left(\frac{R_2}{r}\right)^2+1\right]\beta-\frac{2\theta^*}{\pi}\left[1+\beta^2\left(\frac{R_2}{r}\right)^2\right]\right\rangle\right\}+$$

$$+\frac{P_{2max}\left(\theta^* Cos\theta^* - Sin\theta^*\right)}{\pi\theta^{*2}}\left[\frac{3(1-\nu)}{1+\beta^2}\left(\frac{r}{R_2}\right)-\frac{(1-\nu)\beta^2}{1+\beta^2}\left(\frac{R_2}{r}\right)^3-(1-\nu)\left(\frac{R_2}{r}\right)\right]Cos\theta+ \qquad (24)$$

$$+\frac{2P_{2max}}{\pi\theta^{*2}}\sum_{n=2}^{\infty}\left[b_{1n}\left(\frac{r}{R_2}\right)^{n-2}-\left(1-\frac{2}{n}\right)b_{2n}\left(\frac{r}{R_2}\right)^{n}+b_{3n}\left(\frac{R_1}{r}\right)^{n+2}-\left(1-\frac{2}{n}\right)b_{4n}\left(\frac{R_1}{r}\right)^{n}\right]\cdot\frac{Cos\,n\theta}{n};$$

$$\tau_{r\theta}=\frac{(1-\nu)\left(\theta^* Cos\theta^*-Sin\theta^*\right)P_{2max}}{\pi\theta^{*2}}\left[\frac{1}{1+\beta^2}\left(\frac{r}{R_2}\right)+\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\left(\frac{R_2}{r}\right)^3-\left(\frac{R_2}{r}\right)\right]Sin\theta+$$

$$+\frac{2P_{2\,max}}{\pi\theta^{*\,2}}\sum_{n=2}^{\infty}\left[b_{1n}\left(\frac{r}{R_2}\right)^{n-2}-b_{2n}\left(\frac{r}{R_2}\right)^{n}-b_{3n}\left(\frac{R_1}{r}\right)^{n}+b_{4n}\left(\frac{R_1}{r}\right)^{n}\right]\frac{Sin\,n\theta}{n}.$$

Коэффициенты $b_{1n}, b_{2n}, b_{3n}, b_{4n}$ определяются по формулам (22).

Для оценки быстроты сходимости рядов в (24) найдем асимптотические выражения для коэффициентов $b_{1n}, b_{2n}, b_{3n}, b_{4n}$. Учитывая, что при $\beta<1\ \lim_{n\to 0}\beta^n=0$ и $\beta<1\ \lim_{n\to 0} n\cdot\beta^n=0$, при достаточно больших n отбрасываем, слагаемые содержащие β в положительных степенях n и числах кратных n. Тогда

$$b_{1n}\sim\left(\frac{Sin\,n\theta^*}{n}-\theta^*\cdot Cos\,n\theta^*\right);\quad b_{2n}\sim\left(\frac{Sin\,n\theta^*}{n}-\theta^*\cdot Cos\,n\theta^*\right);$$

$$b_{3n}\sim-\left(Sin\,\theta^*-\theta^*\cdot Cos\,n\,\theta^*\right)\cdot\left(\frac{Sin\,\frac{\pi\,n}{2}}{n}-\frac{\pi}{2}Cos\,\frac{\pi\,n}{2}\right); \qquad (25)$$

$$b_{4n}\sim-\left(Sin\,\theta^*-\theta^*\cdot Cos\,n\,\theta^*\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot Sin\,\frac{\pi\,n}{2}-\frac{\pi}{2}Cos\,\frac{\pi\,n}{2}\right).$$

Из формул (25) следует ограниченность коэффициентов b_{1n}, b_{2n}, b_{3n}, b_{4n}. Стремление к нулю выражений $n\cdot\beta^{\,n}$ при $\beta<1$ доказывается с помощью правила Лопиталя. Выражение $n\beta^n=\dfrac{n}{\left(\dfrac{1}{\beta}\right)^n}$ соответствует неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ $при\ n>\infty$.

Рассмотрим функцию $\frac{X}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^{X}}$, которая при целых X совпадает с $n \cdot \beta^{n}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\beta^{n}\right)=\lim_{X\to\infty}\frac{X}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^{X}}=\lim_{X\to\infty}\frac{(X)'}{\left(\left(\frac{1}{\beta}\right)^{X}\right)'}=\frac{1}{ln\left(\frac{1}{\beta}\right)}\lim_{X\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^{X}}=\frac{1}{ln\left(\frac{1}{\beta}\right)}\cdot\frac{1}{\infty}=0.$$

Коэффициенты рядов, определяющих компоненты тензора напряжений убывают. Быстрота убывания членов ряда имеет порядок $0,\left(\frac{1}{n}\right)$.

При больших значениях n из формул (25) следует ограниченность коэффициентов b_{1n}, b_{2n}, b_{3n}, b_{4n}, а также равенства $b_{1n} = b_{2n}$ и $b_{3n} = b_{4n}$. Определяющим быстроту сходимости рядов для σ_r и σ_θ являются члены ряда:

$$\left[b_{1n}-\left(1-\frac{2}{n}\right)b_{2n}\right]\frac{Cosn\theta}{n},\quad \left[b_{1n}-\left(1+\frac{2}{n}\right)b_{2n}\right]\frac{Cosn\theta}{n}$$ - для наружного контура;

$$\left[b_{3n}-\left(1+\frac{2}{n}\right)b_{4n}\right]\frac{Cosn\theta}{n},\quad \left[b_{3n}-\left(1-\frac{2}{n}\right)b_{4n}\right]\frac{Cosn\theta}{n}$$ - для внутреннего контура.

Из асимптотических выражений для b_{1n}, b_{2n}, b_{3n}, b_{4n} следует, что быстрота сходимости рядов, определяющих напряжённое состояние на контурах, сравнима с быстротой сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Cosn\theta}{n^2}$, который сходится абсолютно. Ряды определяющие $\tau_{r\theta}$ сходятся ещё быстрее.

3. Заключение

1. Расчетная модель диска генератора волн представляет плоскую конструкцию с центральным отверстием под подшипник, по наружному и внутреннему контурам приложена распределенная нагрузка со стороны зубчатого зацепления и опорная реакция подшипника. Распределенные нагрузки аппроксимированы параболическим законом. Под действием приложенной нагрузки диск находится в плосконапряженном состоянии. Деформация диска имеет волновой характер, за каждый оборот эксцентрикового вала генератора волн происходит циклическое изменение нагрузки диска, от $\boldsymbol{0}$ до $\boldsymbol{F_{max}}$.

2. Решена задача о напряжённо – деформированном состоянии диска генератора волн крупной волновой зубчатой передачи. Напряженное состояние выражено через функцию напряжений $\phi(r,\theta)$, удовлетворяющую бигармоническому уравнению теории упругости. Учитывая четность внешней нагрузки, решения бигармонического уравнения представлено в виде ряда по косинусам, полученное уравнение решено в форме Мичелла. Компоненты тензора напряжений определяются через функцию напряжений.

3. Решение задачи теории упругости в форме сходящихся рядов описывает напряжённое состояние диска генератора волн и позволяет определить тензор напряжений в любой точке диска, в т. ч. на граничных поверхностях – по наружному и внутреннему контурам. Обоснованность принятых допущений упростила постановку и решение поставленной задачи без ущерба точности полученных результатов.

4. Для оценки быстроты сходимости рядов найдены асимптотические выражения для коэффициентов b_{1n}, b_{2n}, b_{3n}, b_{4n}. Из асимптотических выражений для b_{1n}

, b_{2n} , b_{3n} , b_{4n} следует, что быстрота сходимости рядов, определяющих напряжённое состояние на контурах, сравнима с быстротой сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Cosn\theta}{n^2}$, который сходится абсолютно. Ряды определяющие $\tau_{r\theta}$ сходятся ещё быстрее.

5. Результатами выполненного исследования можно воспользоваться еще на стадии проектирования при определении влияния и оценки напряженного состояния, а также при определении размеров дисков генератора волн, предназначенных для работы в условиях тяжелого машиностроения.

Список литературы:

1. Стрельников В.Н., Суков Г.С., Волошин А.И. Создание волновых передач для тяжелого машиностроения // Вестник Восточноукраинского национального университета им. В. Даля. Научный журнал. – Луганск, 2009. – № 12 (142). – С. 132 – 136.
2. Ueura, K; Kiyosawa, Y; Kurogi, J; Kanai, S; Miyaba, H; Maniwa, K; Suzuki, M; Obara, S (2008). "Tribological aspects of a strain wave gearing system with specific reference to its space application". Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology 222 (8): 1051–1061.
3. Стрельников В.Н., Суков Г.С., Суков М.Г. Анализ осевых сил, возникающих на гибком колесе волновой передачи // Вестник национального технического университета “ХПИ”. – Харьков, 2012. – Вып. 36′2012. – С. 140 – 145.
4. Стрельников В.Н., Суков Г.С., Суков М.Г. Экспериментальное исследование осевых сил крупной волновой передачи // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Междунар. сб. научных трудов – Донецк: ДонНТУ. – 2012. – Вып. 1, 2(44). – С. 238 – 243.
5. Стрельников В.Н., Суков Г.А., Суков М.Г. Исследование взаимодействия гибкого колеса с генератором волн // Les problèmes contemporains de la technosphère et de la formation des cadres d’ingénieurs // Recueil des exposés des participants de la V Conférence internationale scientifique et méthodique à Tabarka du 06 au 15 octobre 2011. – Donetsk: UNTD, 2011. – P.197 – 201.

V.N. Strelnikov, G.S. Sukov, M.G. Sukov

WAVE GENERATOR DISK DEFLECTED MODE INVESTIGATION WITH REGARD TO LARGE WAVE GEAR

Central-bore disk deflected mode theoretical estimate results are presented with regard to large wave gear disk wave generator load conditions. Stress state is represented through stress function which is satisfied to biharmonic equation. Biharmonic equation solving is gotten in cosine-series form. External load is represented in trigonometric series form for boundary problem statement. Equations set solving is determined in Kramer’s form.

Key words: *disk, tensor, stress, deformation, load, series.*

В.М. Стрельніков, Г.С. Суков, М.Г. Суков

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ДИСКУ ГЕНЕРАТОРА ХВИЛЬ КРУПНОЇ ХВИЛЬОВОЇ ПЕРЕДАЧІ

Представлені результати теоретичної оцінки напружено-деформованого стану диску з центральним отвором відповідно до умов навантаження дискового генератора хвиль крупної хвильової передачі. Напружений стан представлений функцією напружень, яка задовольняє бігармонічному рівнянню, розв’язки якого знаходимо у вигляді ряду по косинусам. Для поставлення крайових задач зовнішнє навантаження представлено у вигляді тригонометричних рядів. Розв’язок системи рівнянь, з якої визначаються коефіцієнти розкладання у ряди компонент тензора напружень, заходимо у формі Крамера.

Ключові слова: *диск, тензор, напруження, деформація, навантаження, ряд.*

Надійшла до редколегії 11.06.2013 р.