УДК 681.5

А.Л. Ляшенко, С.Л. Морева
СПГГУ, ЛАЭС, г. Санкт-Петербург, г. Сосновый Бор, Россия
Тел.: (812) 335-26-55; E-mail: akuna_matata_kmv@mail.ru
Тел.: (81369) 7-23-14; E-mail: sweetmoreva@yandex.ru

ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В статье рассмотрены частотные методы анализа сосредоточенных и распределенных систем управления. Рассмотрен вопрос о разработке методики частотного анализа систем с распределенными параметрами с помощью расширенных частотных характеристик. Разработанные методики позволяют рассчитывать запас устойчивости по показателю колебательности систем с распределёнными параметрами.
Ключевые слова: *системы с распределенными параметрами, расширенные частотные характеристики, индекс колебаний.*

На сегодняшний день частотные методы широко используются для анализа сосредоточенных и распределенных систем управления. Под частотными методами понимают такие методы, которые не рассматривают вида переходного процесса, а базируются па некоторых частотных свойствах системы. В теории автоматического управления известны обычные частотные характеристики (ОЧХ) и расширенные частотные характеристики (РЧХ).

Обычные частотные характеристики применяют для исследования устойчивости АСР и получаются при переходе в передаточной функции от переменной p к переменной $j\omega$. Уравнение $p = j\omega$ является уравнением мнимой оси, т.е. границы области устойчивости – левой полуплоскости корней характеристического уравнения замкнутой системы. Таким образом, в случае обычных частотных характеристик переменная p изменяется вдоль границы устойчивости. Метод анализа систем с распределенными параметрами с помощью ОЧХ [1] рассмотрен в трудах И.М. Першина.

Расширенными частотными характеристиками (РЧХ) называются выражения для передаточной функции, для которых переменная p заменяется уравнением границы заданной колебательности. Для получения РЧХ следует заменить переменную p в передаточной функции уравнением границы заданной колебательности:

$$p = \omega(j - m), \quad 0 \le \omega \le \infty .$$

Метод анализа систем с сосредоточенными параметрами с помощью РЧХ [2] рассмотрен в трудах Е.Г.Дудникова.

Рассмотрим процедуру построения РЧХ с целью их применения для анализа систем с распределёнными параметрами.

Рассмотрим процедуру построения РЧХ для системы управления, математическая модель которого имеет вид:

$$\frac{\partial Q(x,y,z,t)}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 Q(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q(x,y,z,t)}{\partial z^2}\right), \qquad (1)$$

$$0 < x < L_x,\ 0 < y < L_y,\ 0 < z < L_z .$$

Граничные и начальные условия задаются следующими соотношениями:

$$Q(x,0,z,\tau) = Q(x,L_y,z,\tau) = 0\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial Q(0,y,z,\tau)}{\partial x} = \frac{\partial Q(L_x,y,z,\tau)}{\partial x} = 0\,,$$

$$\lambda \frac{\partial Q(x,y,L_z,\tau)}{\partial z} = U(x,y,\tau)\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial Q(x,y,0,\tau)}{\partial z} = 0\,, \tag{4}$$

$$Q(x,y,z,0) = 0\,. \tag{5}$$

В соответствии с граничными условиями представим входное воздействие на объект управления $U(x,y,\tau)$ в виде ряда Фурье [1]:

$$U(x,y,\tau) = \sum_{\eta,\gamma=1}^{\infty} D_{\eta,\gamma}(\tau)\cdot \sin(\psi_\eta \cdot x)\cdot \sin(\tilde{\varphi}_\gamma \cdot y)\,, \tag{6}$$

где $\psi_\eta = \dfrac{\pi\cdot\eta}{L_x}$, $(\eta = \overline{1,\infty})$; $\tilde{\varphi}_\gamma = \dfrac{\pi\cdot\gamma}{L_y}$, $(\gamma = \overline{1,\infty})$.

Согласно [1] распределённый объект с такой математической моделью и входным воздействием вида (6) может быть описан передаточной функцией, которая по η,γ $\left(\eta,\gamma = \overline{1,\infty}\right)$ моде входного воздействия при $z = \overset{*}{z}(\overset{*}{z} < L_z)$ имеет вид:

$$W_{0,\eta,\gamma}(p) = \frac{\exp\left(\beta_{\eta,\gamma}\cdot \overset{*}{z}\right) + \exp\left(-\beta_{\eta,\gamma}\cdot \overset{*}{z}\right)}{\exp\left(\beta_{\eta,\gamma}\cdot L_z\right) + \exp\left(-\beta_{\eta,\gamma}\cdot L_z\right)}\,,\ \left(\eta,\gamma = \overline{1,\infty}\right), \tag{7}$$

где $\beta_{\eta,\gamma} = \left(\dfrac{p}{a} + \psi_\eta^2 + \tilde{\varphi}_\gamma^2\right)^{1/2}, \left(\eta,\gamma = \overline{1,\infty}\right);$

$\psi_\eta = \pi\cdot \eta / L_x$; $\tilde{\varphi}_\gamma = \pi\cdot \gamma / L_y$.

$a, \overset{*}{z}, L_z$ - заданные числа.

Для частотного анализа произведем замену $p = \omega(j - m)$.

Используя полученные выражения и программный комплекс MathCAD, произведем построение расширенных частотных характеристик по $\eta = 1, 2, 3, 4, 70, 80, 90, 100$ модам входного воздействия.

Запишем передаточную функцию (7) с использованием обобщенной координаты G, в этом случае она примет вид [1]:

$$W_0(G,p) = \frac{\exp\left(\beta(G)\cdot \overset{*}{z}\right) + \exp\left(-\beta(G)\cdot \overset{*}{z}\right)}{\exp\left(\beta(G)\cdot L_z\right) + \exp\left(-\beta(G)\cdot L_z\right)}\,,\ G_H \le G \le \infty\,, \tag{8}$$

где $\beta(G) = \left(G + p/a\right)^{1/2}$, $G_H = \tilde{G}_H = \psi_\eta^2 + \tilde{\varphi}_\eta^2$.

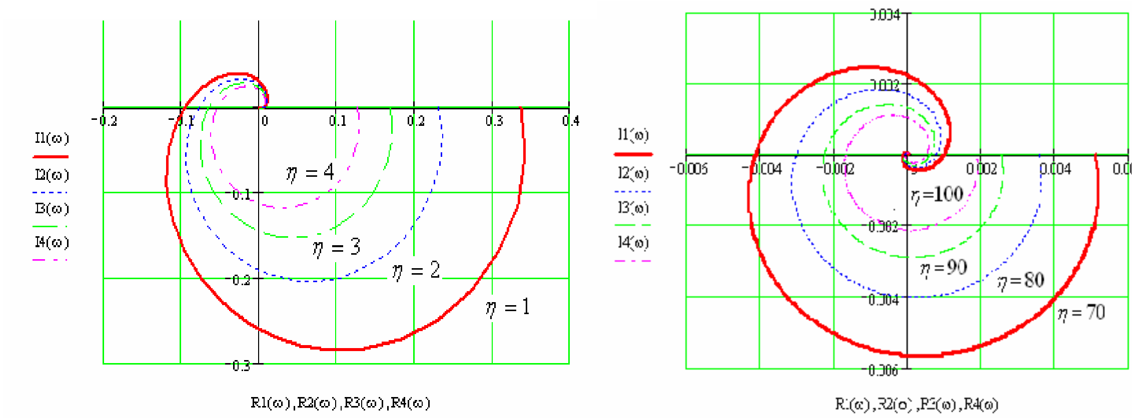

Рис. 1. Расширенная амплитудно-фазовая частотная характеристика

Для частотного анализа объекта положим в (8) $p=\omega(j-m)$.При изменении значения ω от 0 до ∞, а значения G от $G_н$ до ∞, вектор $W(G,j\omega,m)$ в пространстве Re(W), Im(W), G опишет поверхность, которую назовем расширенным пространственным годографом (РПГ) (рис. 2).

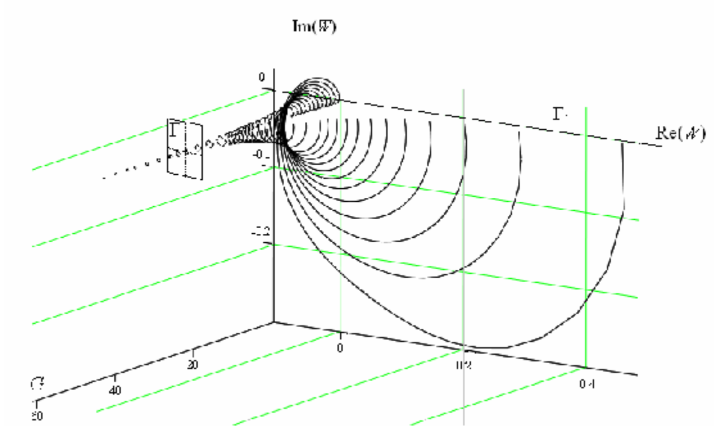

Рис. 2. Расширенный пространственный годограф

Для определения частотной характеристики объекта, по заданной $(\overset{*}{\eta},\overset{*}{\gamma},\overset{*}{\xi})$ пространственной гармонической составляющей входного воздействия, необходимо рассечь пространственный годограф плоскостью Г, параллельной плоскости $Г_1$ и проходящей через точку с координатами:

$$\text{Re}(W)=0,\ \ \text{Im}(W),=0,\ \ G=\tilde{G}(\overset{*}{\eta},\overset{*}{\gamma},\overset{*}{\xi}).$$

След пересечения плоскости Г и пространственного годографа будет представлять искомую частотную характеристику.

Одним из показателей качества переходного процесса является степень колебательности.

В качестве типовых процессов рекомендуются использовать процессы с заданной степенью затухания $\psi=0{,}75\div 0{,}9$. Наиболее употребительными при расчетах являются значения $m=0{,}221...0{,}336$, соответствующие значениям $\psi=0{,}75\div 0{,}9$.

Используя заданные значения степени колебательности процесса и программный комплекс MathCAD, произведем расчёты показателей колебательности, получим:

$M = 1.656...2.373$. Выберем несколько значений, лежащих в этом пределе. Полученные в результате расчетов М-окружности для различных типовых значений показателя колебательности и расширенные амплитудно-фазовые частотные характеристики объекта управления представлены на рис. 3.

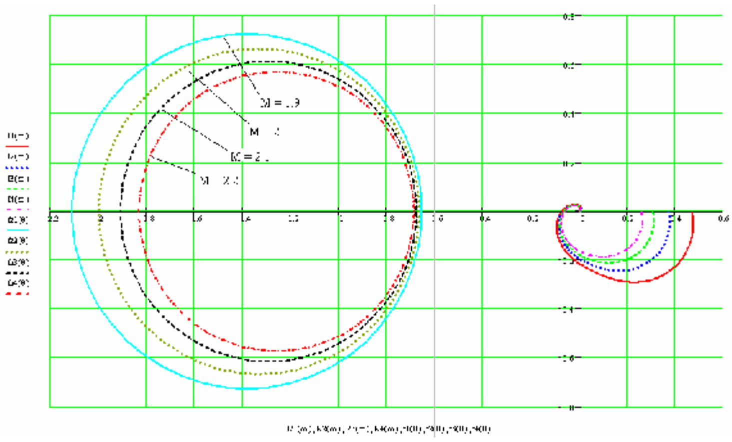

Рис. 3. М-окружности и расширенные амплитудно-фазовые частотные характеристики

В [3] было доказано, что введенные распределённый пространственный годограф и пространственная М-окружность позволяют сделать следующие утверждение: замкнутая система обладает запасом устойчивости выше заданного, если расширенный пространственный годограф разомкнутой системы не заходит внутрь пространственной М-окружности. Если РПГ касается пространственной М-окружности, то замкнутая система обладает заданным запасом устойчивости.

Передаточная функция, согласно [1] и [4], для объекта записанного с помощью выражений (1)-(5) будет иметь вид:

$$W(x,y,z,\rho,\nu,\upsilon,p)=\frac{8}{l_x\cdot l_y\cdot l_z}\cdot\sum_{k,m,n=1}^{\infty}\frac{B_{k,m,n}(\cdot)}{p+a\pi^2\left(\frac{k^2}{l_x^2}+\frac{m^2}{l_y^2}+\frac{n^2}{l_z^2}\right)}, \qquad (9)$$

где принято обозначение:

$$B_{k,m,n}(\cdot)=\sin\left(\frac{k\cdot\pi\cdot x}{l_{x1}}\right)\cdot\sin\left(\frac{m\cdot\pi\cdot y}{l_y}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot z}{l_z}\right)\cdot\sin\left(\frac{k\cdot\pi\cdot\rho}{l_x}\right)\cdot\sin\left(\frac{m\cdot\pi\cdot\nu}{l_y}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot\upsilon}{l_z}\right).$$

При фиксированных значениях $x, y, z -$ точки наблюдения и $\rho,\nu,\upsilon -$ точки действия источника и $k,m,n = 1$, произведём преобразование и получим:

$$W(x,y,z,\rho,\nu,\upsilon,p)=\frac{K_{k,m,n}(x,y,z,\rho,\nu,\upsilon)}{T_{k,m,n}\,p+1}, \qquad (10)$$

где принято обозначение:

$$K_{k,m,n}(\cdot)=\frac{8l_1l_2l_3\sin\left(\frac{k\cdot\pi\cdot x}{l_x}\right)\cdot\sin\left(\frac{m\cdot\pi\cdot y}{l_y}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot z}{l_z}\right)\cdot\sin\left(\frac{k\cdot\pi\cdot\rho}{l_x}\right)\cdot\sin\left(\frac{m\cdot\pi\cdot\nu}{l_y}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot\upsilon}{l_z}\right)}{a\pi^2(l_y^2l_z^2k^2+l_x^2l_z^2m^2+l_x^2l_y^2n)},$$

$$T_{k,m,n}=\frac{l_1^2l_2^2l_3^2}{a\pi^2(l_y^2l_z^2k^2+l_x^2l_z^2m^2+l_x^2l_y^2n)}.$$

Рассмотрим систему управления с распределенным И-регулятором, представленную на рис.4.

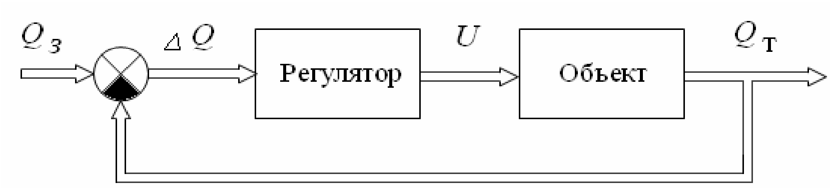

Рис. 4. Структурная схема системы управления

Передаточная функция распределенного И-регулятора согласно [1] имеет вид:

$$W(x,y,p)=E_4\cdot\left[\frac{n_4-1}{n_4}-\frac{1}{n_4}\nabla^2\right]\cdot\frac{1}{p}\ , \tag{11}$$

где: E1 , E4 - коэффициенты усиления;

∇^2 - лапласиан;

n_1 , n_4 - весовые коэффициенты.

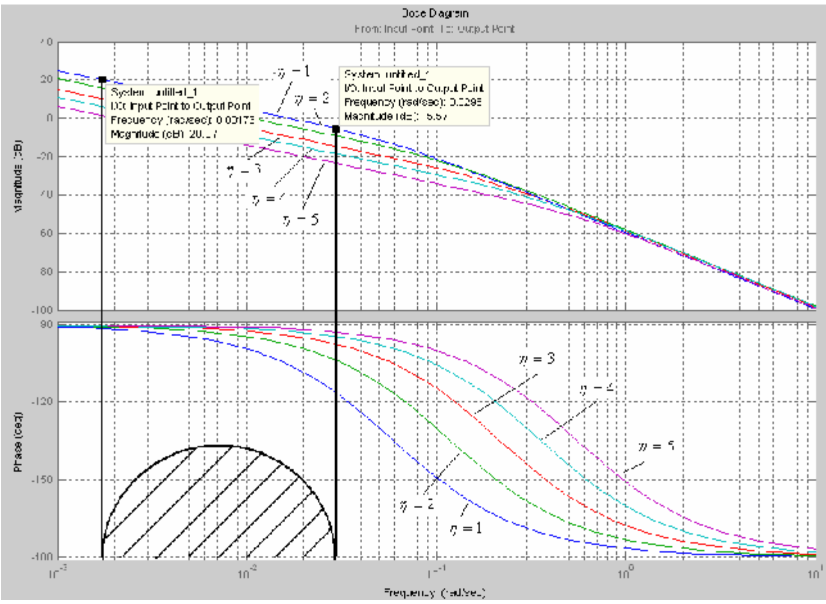

Рис. 5. ЛАЧХ и ФЧХ объекта управления

Для частотного анализа произведем замену: для ОЧХ - $p = j\omega$.

Используя полученные выражения и программный комплекс MatLab, произведем построение расширенных частотных характеристик по $\eta = 1, 2, 3, 4, 5$ модам входного воздействия. Если имеется построенная ЛАЧХ (рис. 5), то по имеющимся μ.-кривым и при заданном значении M можно достроить требуемое значение запаса по фазе для каждого значения модуля. Для этого воспользуемся методикой, изложенной в [5]. Это построение должно делаться для модулей, лежащих в пределах (12).

$$\frac{M}{M+1} < A < \frac{M}{M-1}, \tag{12}$$

В результате будет получена запретная область для фазовой характеристики.

В результате проведенных исследований было установлено: чтобы показатель колебательности был не больше заданного значения, фазовые характеристики разомкнутой системы по всем пространственным модам входного воздействия не должны заходить в эту область. Нетрудно увидеть, что с увеличением порядкового номера моды входного воздействия, фазовые характеристики удаляются от запретной зоны. Таким образом, для данного анализа достаточно знать реакцию объекта управления на первую пространственную моду входного воздействия.

Представленные методики могут использоваться для анализа объектов на запас устойчивости. В частности, полученный расширенный пространственный годограф делает возможным применение критерия Найквиста. Разработанные методики позволяют рассчитывать запас устойчивости по показателю колебательности систем с распределёнными параметрами. Полученные с помощью представленной методики расширенные частотные характеристики и M_η-окружности позволят рассчитывать настройки распределённых регуляторов, реализующих различные законы управления. При этом таким образом, что бы обеспечивалось расположение всех корней характеристического полинома замкнутой системы внутри сектора, определяемого требуемой степенью колебательности *m*, а, следовательно, и требуемой степенью затухания переходного процесса.

Список литературы:

1. Першин И.М. Анализ и синтез систем с распределенными параметрами. – Пятигорск, РИА на КМВ, 2007. – 244с.

2. Дудников Е.Г. Основы автоматического регулирования тепловых процессов. Учебное пособие для ВУЗов. М., Л. Госэнергоиздат,1956 - 264 с.

3. Ляшенко А.Л. Частотный анализ объектов с распределёнными параметрами с помощью расширенных частотных характеристик, Материалы 6-й научной конференции «Управление и информационные технологии» (УИТ - 2010).СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ Электроприбор», 2010. –65-70 с.

4. Бутковский А.Г. Характеристики систем с распределёнными параметрами. – М.: Наука, 1979. – 224 с.

5. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления.- Изд.4-е, перераб. и доп. – СПб., Профессия, 2007. – 752 с.

Надійшла до редколегії 18.05.2012 р.

A. Liashenko, S.Moreva

VIBRATION ANALYSIS OF DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEMS

The possibility of use of the device of the expanded frequency characteristics for systems with the distributed parameters is considered. The problem on working out of a technique of the frequency analysis of systems with the distributed parameters by means of the expanded frequency characteristics is formulated and solved. The developed technique allows to make synthesis distributed regulator on the set index of oscillation.

Key words: *Systems with the distributed parameters, the expanded frequency characteristics, index of oscillation.*

А.Л. Ляшенко, С.Л. Морєва

ЧАСТОТНИЙ АНАЛІЗ СИСТЕМ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

У статті розглянуті частотні методи аналізу зосереджених і розподілених систем управління. Розглянуто питання про розробку методики частотного аналізу систем з розподіленими параметрами за допомогою розширених частотних характеристик. Розроблені методики дозволяють розраховувати запас стійкості за показником коливає систем з розподіленими параметрами.

Ключові слова: *системи з розподіленими параметрами, розширені частотні характеристики, індекс коливань.*