УДК 621.833

В.Н. Стрельников, Н.Д. Воробьев, Ю.В. Стрельников
ПАО «НКМЗ», БГТУ, г. Краматорск ,г. Белгород, Украина, Россия
Тел.: +38 (06272) 2-53-91*; Факс:* +38 (06264) 7-22-49*; E-mail:* *rs@nkmz.donetsk.ua*

ПРОЧНОСТНОЙ РАСЧЁТ ЗУБЬЕВ С КРУГОВЫМ ПРОФИЛЕМ

В статье изложен прочностной расчет зубьев кругового профиля, выполненный методом конечных элементов. Напряженное состояние зубьев представлено в биполярных системах координат, что позволило получить решение не только для массива зуба, но и для окрестностей его контура.
Ключевые слова: *сателлит, ролик, поверхность, зуб, упругость, модель, расчет.*

Введение. Прогресс техники и технологии способствует формированию всё более жёстких условий к качественным параметрам приводных устройств во всех отраслях современного промышленного производства. Внешние силовые факторы концентрируются на механическом приводе, реализующем технологические нагрузки рабочих органов машины. Ядро приводной техники составляют передачи зацеплением, освоенное промышленностью разнообразие видов адаптирует их к различным условиям эксплуатации. Мировой объём потребления передач каждые 5 – 6 лет удваивается [1, 2]. Со стороны потребителей возрастают претензии в отношении надёжности приводной техники, вибраций и шумности, КПД. Сохраняется тенденция к увеличению нагрузки, ресурса, снижению массы, габаритов.

Передачи с промежуточными телами качения отвечают актуальным требованиям развития приводной техники: обладают малыми габаритами и массой, высоким КПД, благодаря многопоточности зацепления - повышенной нагрузочной способностью, выпукло – вогнутый контакт упругих роликов и зубьев близкой кривизны оптимизирует условия смазки, минимизирует контактные нагрузки и износ сопряжённых поверхностей, гасит шум и вибрацию [3].

Целью данной работы является разработка расчётной модели с аппроксимацией зуба биполярными координатами; разработка дискретного метода решения уравнений упругости и выполнение практического решения граничной задачи прочностного расчёта зуба.

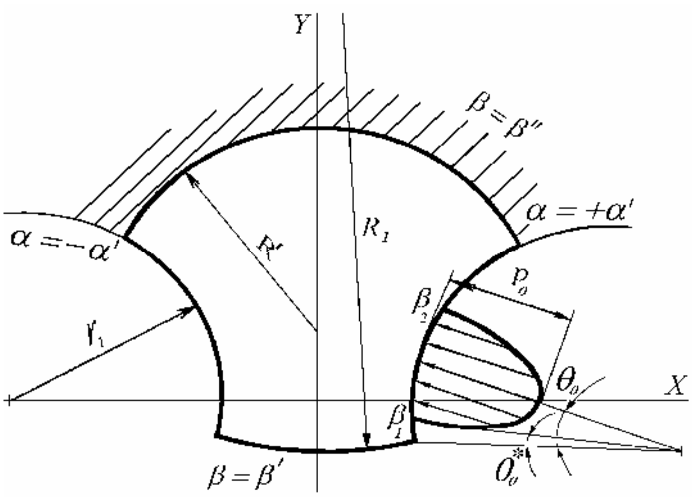

Рис. 1. Расчетная схема нагруженного зуба

Содержание работы. Выделим из массива зуб цилиндрической поверхностью большого радиуса R' (рис. 1). Сечение зуба ограничим контуром, образованным дугами окружностей боковых поверхностей с радиусами r_1 для сателлита и r_2 для колеса, радиусами R_1 и R_2 очерчивающими окружности вершин зубьев сателлита и колеса. Зададим радиусы R_1^*, R_2^* центров образующих окружностей и число зубьев z_1, z_2 сателлита и колеса. Определим угловые шаги сателлита λ_1 и колеса λ_2. Радиусы окружностей R', выделяющие зубья из массива, получаются построением. Взаимодействие зуба с массивом рассматриваем как заделку. Участок зуба загружен нормальной контактной нагрузкой. Граничную задачу о прочности зуба решаем в биполярных координатах. Возможен выбор системы координат, для которой окружности радиусов r_1 или r_2 образующие профиль зубьев и R' вырезывающие зуб из массива, будут координатными линиями, а окружности выступов с радиусами R_1 или R_2 будут заменены близкими к ним координатными линиями (рис. 2). На оси абсцисс координатной плоскости $X0Y$ симметрично относительно начала координат расположим полюсы O' и $0''$. Расстояние между полюсами примем равным $2a$.

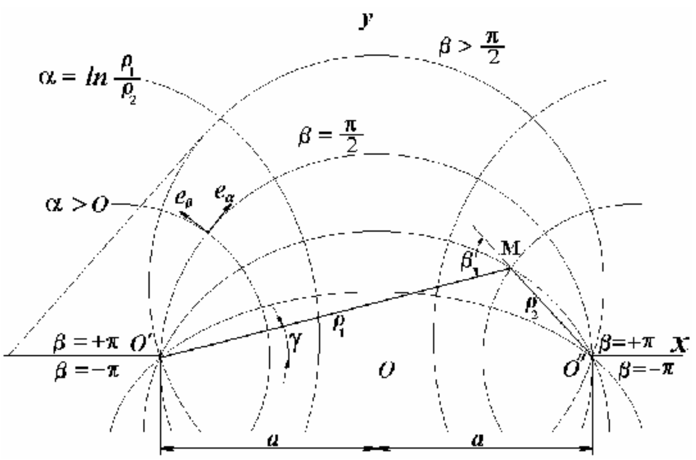

Рис. 2. Координатные линии биполярной системы координат

Из полюсов в точку плоскости $X0Y$ проведем радиусы ρ_1 и ρ_2. Задание абсолютных величин ρ_1 и ρ_2 не определяет однозначно положение точки M на плоскости: для заданных ρ_1 и ρ_2 получаются две точки симметрично относительно оси абсцисс. Неоднозначность устраним введя биполярные координаты α и β. За координату α примем $\alpha = \ln \rho_1 / \rho_2$.

Правой полуплоскости $X0Y$ соответствуют положительные значения α, левой – отрицательные. За координату β примем внешний угол треугольника $0'0''M$, отсчитанный от продолжения радиуса r_2 до r_1, так чтобы $/\beta/<180°$. Положительный угол отсчитывается против стрелки часов, отрицательный – по часовой. Верхней полуплоскости соответствуют положительные значения углов β, нижней – отрицательные. Однозначность нарушается на оси абсцисс при $/X/\geq a$. Вдоль линий $Y=0$ при $X\leq -a$ и $X\geq a$ следует сделать разрезы. Верхним берегам разрезов соответствуют значения $\beta=\pi$, нижним $\beta=-\pi$. Установим связь декартовых координат с биполярными. Выразим радиусы ρ_1 и ρ_2 через α и β, учитывая $\rho_1 = \rho_2 \cdot e^{\alpha}$

$$\rho_1 = \frac{2ae^{\alpha}}{\sqrt{\left(e^{2\alpha}+1\right)+2e^{\alpha}\cos\beta}}, \qquad \rho_2 = \frac{2a}{\sqrt{\left(e^{2\alpha}+1\right)+2e^{\alpha}\cos\beta}}. \tag{1}$$

Установим зависимость между декартовыми и биполярными координатами

$$X = \frac{a \cdot Sh\,\alpha}{Ch\,\alpha + \cos\beta}, \qquad Y = \frac{a \cdot \sin\beta}{Ch\,\alpha + \cos\beta}. \tag{2}$$

Формулы (2) определяют уравнения координатных линий в параметрической форме, если в них поочередно полагать $\alpha=const$, $\beta=const$. Найдем уравнения координатных линий в явной форме:

$$\left(X - a\frac{Ch\,\alpha}{Sh\,\alpha}\right)^2 + Y^2 = \frac{a^2}{Sh^2\alpha}, \qquad X^2 + (Y + a \cdot ctg\,\beta)^2 = \frac{a^2}{\sin^2\beta}. \tag{3}$$

Из 1[го] уравнения (3): центры окружностей α=*const* расположены на оси *X*, имеют координаты $\left(a\cdot\dfrac{Ch\,\alpha}{Sh\,\alpha};0\right)$ и радиусы $R_\alpha=\dfrac{a}{Sh\,\alpha}$. Из 2[го] уравнения (3): координатные линии β = *const* – окружности с центрами на оси *Y*, имеют координаты (*0; – a Ctg* β) и радиусы $R_\beta=\dfrac{a}{sin\,\beta}$.

Координатные линии проходят через полюсы биполярной системы координат. Определим угловые коэффициенты касательных K_α и K_β к линиям α = *const* и β = *const.*

$$K_\alpha=\frac{Y'_\beta}{X'_\beta}=\frac{(1+Ch\,\alpha\cdot cos\,\beta)}{Sh\,\alpha\cdot sin\,\beta}, \tag{4}$$

$$K_\beta=\frac{Y'_\alpha}{X'_\alpha}=-\frac{sin\,\beta\cdot Sh\,a}{(1+Ch\,\alpha\cdot cos\,\alpha)}. \tag{5}$$

Из формул (4, 5) следует условие ортогональности координатных линий: $K_\alpha\cdot K_\beta=1$.

Вдоль касательных к координатным линиям α = *const* и β = *const* направим орты $\vec{e}_\alpha$ и $\vec{e}_\beta$,. найдем частные производные и определим коэффициенты Ляме:

$$\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial\alpha}=-\frac{H}{R_\beta}\cdot\vec{e}_\beta;\quad \frac{\partial\vec{e}_\beta}{\partial\alpha}=\frac{H}{R_\beta}\cdot\vec{e}_\alpha;\quad \frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial\beta}=-\frac{H}{R_\alpha}\vec{e}_\beta;\quad \frac{\partial\vec{e}_\beta}{\partial\beta}=\frac{H}{R_\alpha}\vec{e}_\alpha. \tag{6}$$

$$H_\alpha=H_\beta=H=\frac{a}{Ch\,\alpha+cos\,\beta}. \tag{7}$$

Рассмотрим построение аппроксимирующего профиля для зуба сателлита (рис. 3). Из центра сателлита 0 проводим окружности радиусами R_1, R_1^* и вертикальную ось симметрии, по обе стороны которой под углами $\lambda_1/2$ проводим лучи. В точках O_1', O_2'' пересечения этих лучей с окружностью радиуса R_1^* на оси X получим центры O_1' и O_2' образующих окружностей зубьев сателлита радиуса r1, которые принимаем за координатные линии α = –α′ и α = +α′ .

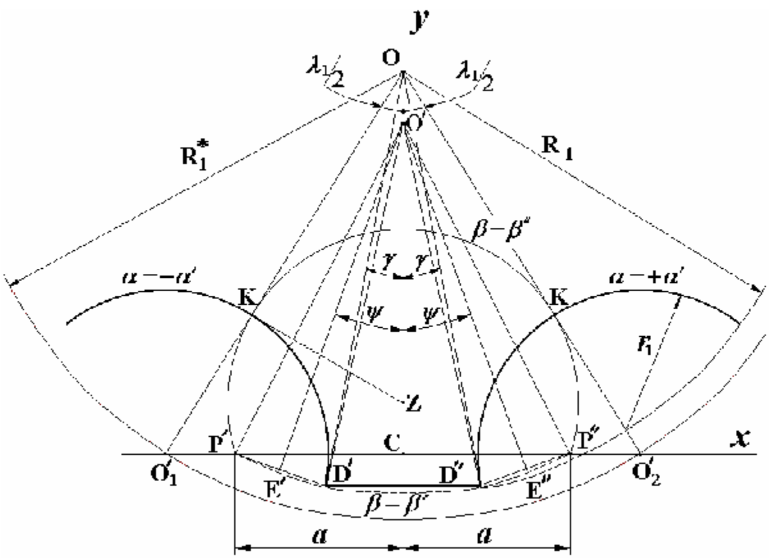

Рис. 3. Аппроксимация профиля зуба сателлита

Из точки *K* пересечения луча, проведенного под углом $\lambda_1/2$ из центра O с образующей зуба сателлита проведем касательную до пересечения с осью *Y* в точке *Z*. Радиусом *KZ* проводим в массиве дугу окружности. Находим на оси *X* точки *P′* и *P″* и принимаем за полюсы. Дуга окружности радиуса $KZ = R'$ будет являться координатной линией $\beta = \beta''$. Определим половину межполюсного расстояния $P'C = a$ и параметр β''

$$a = \sqrt{R_1^{*2} \sin^2 \lambda_1 / 2 - r_1^2} \;. \tag{8}$$

$$\beta'' = \arcsin\left(\frac{a}{KZ}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{R_1^{*2} \cdot \sin^2 \lambda_1 / 2 - r_1^2}}{(R_1^* - r_1) tg\, \lambda_1 / 2}\right). \tag{9}$$

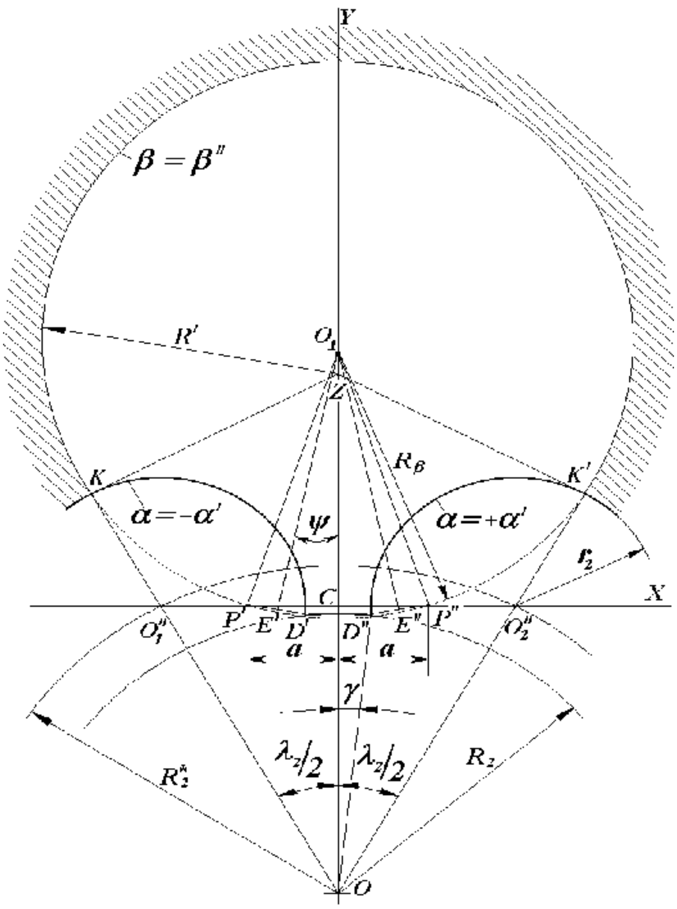

Рис. 4. Аппроксимация профиля зуба колеса

Угол β'' следует выбирать больше $90°$. Для получения координатной линии $\beta=\beta'$, проводим окружность выступов радиусом R_1. В пересечении с окружностями радиусов r_1 получим точки D', D'' соответствующие кромкам зуба. Найдем центр окружности координатной линии $\beta = \beta'$. Отрезок $P'D'$ делим пополам и к середине отрезка восстанавливаем перпендикуляр. Точка O' пересечения перпендикуляра с осью Y является центром окружности – координатной линии $\beta = \beta'$. Радиусом $R'_\beta = 0'P'$ проводим окружность β', с некоторой погрешностью аппроксимирующую линию выступов. Определим параметр β', для чего вычислим углы γ, ψ и радиус R'_β

$$\cos(\lambda_1 / 2 - \gamma) = \frac{R_1^2 - r_1^2 + R_1^{*2}}{2 R_1 R_1^*}. \tag{10}$$

$$\sin\psi = \frac{R_1 \cdot \cos\gamma - R_1^* \cos\lambda_1 / 2}{\sqrt{(R_1 \cos\gamma - R_1^* \cos\gamma_1 / 2) + (a - R_1 \cdot \sin\gamma)^2}}\,, \tag{11}$$

$$R_{\beta'} = \frac{1}{2\sin\psi} \sqrt{(R_1 \sin\gamma + a)^2 + (R_1 \cos\gamma - R_1^* \cos\lambda_1 / 2)^2}\,. \tag{12}$$

$$\beta' = \arcsin\left({}^{a}\!/\!_{R_{\beta'}} \right). \tag{13}$$

Пользуясь определением функции $Sh\,\alpha' = a/R_\alpha$ и значением $r_\alpha = r_1$, получим:

$$\alpha' = ln\left(\frac{R_1^*}{r_1} sin\,\lambda_1/2 + \sqrt{\frac{R_1^{*2}}{r_1^2} sin^2\lambda_1/2 - 1}\right). \qquad (14)$$

Параметры профиля зуба центрального колеса (рис. 4) определяются аналогично предыдущему. Уравнение координатной линии $\beta = \beta''$: $X^2 + (Y - CZ)^2 = (KZ)^2$.

Определяем половину межполюсного расстояния a', параметры β'' и α'

$$a' = \sqrt{R_2^{*2}\sin^2 \lambda_2/2 - r_2^2}\,, \qquad \beta'' = \arcsin\left[\frac{\sqrt{R_2^{*2}\sin^2 \lambda_2/2 - r_2^2}}{\left(R_2^{*2} + r_2\right) tg\, \lambda_2/2}\right],$$

$$\alpha' = \ln\left[\frac{R_2^*}{r_2}\sin\frac{\lambda_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{R_2^*}{r_2}\sin\frac{\lambda_2}{2}\right)^2 - 1}\right],$$

$$\sin\psi' = \left(-R_2^*\cos\lambda_2/2 + R_2\cos\gamma\right)\cdot\left[\left(R_2^*\cos\lambda_2/2 - R_2\cos\gamma\right)^2 + \left(R_2\sin\gamma + a\right)^2\right]^{-0,5},$$

$$R_{\beta'} = \frac{\sqrt{(R_2\sin\gamma + a')^2 + \left(R_2^*\cos\lambda_2/2 - R_2\cos\gamma\right)^2 + (a - R_2\sin\gamma)^2\cdot\sin^2\psi'}}{2\sin\psi'}.$$

Уравнения равновесия выделенного элемента зуба в тензорной форме:

$$\nabla T = \frac{1}{H}\left(\bar{e}_\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \bar{e}_\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\left[\bar{e}_\alpha\cdot\bar{e}_\alpha\cdot\sigma_\alpha + (\bar{e}_\alpha\cdot\bar{e}_\beta + \bar{e}_\beta\cdot\bar{e}_\alpha)\tau_{\alpha\beta} + \bar{e}_\beta\cdot\bar{e}_\beta\cdot\sigma_\beta\right] = 0, \qquad (15)$$

где ∇ - оператор Гамильтона; T - тензор напряжений; σ_α, σ_β – напряжения нормальные к координатным линиям $\alpha = const$, $\beta = const$; $\tau_{\alpha\beta}$ – касательные напряжения на гранях элемента, выделенного координатными линиями: α, β, $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$.

В силу ортогональности $\bar{e}_\alpha$, $\bar{e}_\beta$ и (6) получим уравнения равновесия в напряжениях

$$\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\beta} + \frac{H}{R_\alpha}(\sigma_\beta - \sigma_\alpha) + \frac{2H}{R_\beta}\tau_{\alpha\beta} = 0, \qquad \frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\sigma_\beta}{\partial\beta} + \frac{H}{R_\beta}(\sigma_\beta - \sigma_\alpha) - \frac{2H}{R_\alpha}\tau_{\alpha\beta} = 0 \qquad (16)$$

Определим тензор деформации E^*

$$E^* = \frac{1}{2}\left(\nabla\bar{U} + (\nabla\bar{U})'\right) = \left(\frac{1}{H}\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \frac{V}{R_\beta}\right)\bar{e}_\alpha\bar{e}_\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{H}\left(\frac{\partial U}{\partial\beta} - \frac{\partial V}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{V}{R_\alpha} - \frac{U}{R_\beta}\right)\right)\bar{e}_\alpha\bar{e}_\beta +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{H}\left(\frac{\partial U}{\partial\beta} + \frac{\partial V}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{V}{R_\alpha} - \frac{U}{R_\beta}\right)\right)\bar{e}_\beta\bar{e}_\alpha + \left(\frac{1}{H}\frac{\partial V}{\partial\beta} - \frac{U}{R_\alpha}\right)\bar{e}_\beta\bar{e}_\beta, \qquad (17)$$

где $\bar{U} = \bar{e}_\alpha U + \bar{e}_\beta(V)$ – вектор смещения; $(\nabla\bar{U})'$ – транспонирование $\nabla\bar{U}$.

Компоненты тензора напряжений для плоско - деформированного состояния выразим через компоненты тензора деформаций с помощью обобщенного закона Гука :

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\alpha &= \frac{(1-\nu)E}{(1-\nu)(1-2\nu)\alpha}\left[(Ch\,\alpha+\cos\beta)\left(\frac{\partial U}{\partial\alpha}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)+V\sin\beta-\frac{\nu}{1-\nu}USh\,\alpha\right],\\
\sigma_\beta &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\alpha}\left[(Ch\,\alpha+\cos\beta)\left(\frac{\partial V}{\partial\beta}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial U}{\partial\alpha}\right)-USh\,\alpha+\frac{\nu}{1-\nu}V\sin\beta\right],\\
\tau_{\alpha\beta} &= \frac{E}{2(1-\nu)\alpha}\left[(Ch\,\alpha+\cos\beta)\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)+(VSh\,\alpha-U\sin\beta)\right].
\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

Подставим выражения (18), (7) в (16) получим уравнения упругости в перемещениях:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2}+\frac{2}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 U}{\partial\beta^2}+\frac{(3-4\nu)\cdot\sin\beta}{2(1-\nu)(Ch\alpha+\cos\beta)}\cdot\frac{\partial V}{\partial\alpha}+\\
&+\frac{(3-4\nu)\cdot Sh\alpha}{2(1-\nu)(Ch\alpha+\cos\beta)}\frac{\partial V}{\partial\beta}-\frac{1}{(Ch\alpha+\cos\beta)}\left(Ch\alpha-\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\cos\beta\right)U=0,\\
&\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2}-\frac{(3-4\nu)\sin\beta}{2(1-\nu)(Ch\alpha+\cos\beta}\frac{\partial U}{\partial\alpha}-\\
&-\frac{(3-4\nu)Sh\alpha}{2(1-\nu)(Ch\alpha+\cos\beta)}\frac{\partial U}{\partial\beta}-\frac{1}{(Ch\alpha+\cos\beta)}\left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}Ch\alpha-\cos\beta\right)V=0.
\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

Решение системы уравнений (19) определяет напряженно – деформированное состояние зуба. Решение должно удовлетворять граничным условиям на контуре поперечного сечения зуба.

Зададим граничные условия. На линии $\alpha=\alpha'$ на участке изменения координаты β от β_1 до β_2 действует контактное давление $P(\beta)$. Остальные участки $\beta'\le\beta\le\beta_1$ и $\beta_2\le\beta\le\beta''$ свободны от нагрузки ($\sigma_\alpha=0$, $\tau_{\alpha\beta}=0$). На линии $\alpha=-\alpha$ отсутствует нагрузка ($\sigma_\alpha=0$, $\tau_{\alpha\beta}=0$). На линии $\beta=\beta'$ отсутствует нагрузка ($\sigma_\beta=0$, $\tau_{\alpha\beta}=0$). Заменяя $\sigma_\alpha,\sigma_\beta,\tau_{\alpha\beta}$ по формулам (18) получим граничные условия в перемещениях:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial\alpha}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)+\frac{\sin\beta}{Ch\alpha^*+\cos\beta}V-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{Sh\alpha^*}{Ch\alpha^*+\cos\beta}U\right\}_{\alpha=-\alpha'}=0,\\
&\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)-\frac{Sh\alpha^*}{Ch\alpha^*+\cos\beta}V-\frac{Sin\beta}{Ch\alpha^*+\cos\beta}U\right\}_{\alpha=-\alpha'}=0,\\
&\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial\alpha}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)+\frac{\sin\beta}{Ch\alpha^*+\cos\beta}V-\frac{\nu}{1-\nu}\cdot\frac{Sh\alpha^*}{Ch\alpha^*+\cos\beta}U\right\}_{\alpha=\alpha'}=\\
&=\left\{\begin{array}{ll}0, & \beta'\le\beta\le\beta_1,\\ -\dfrac{P\alpha(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}, & \beta_1<\beta<\beta_2,\\ 0, & \beta_2\le\beta\le\beta'\end{array}\right\}.\\
&\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)+\frac{Sh\alpha^*}{Ch\alpha^*+\cos\beta}V-\frac{\sin\beta}{Ch\alpha^*+\cos^*}\right\}_{\alpha=\alpha'}=0,\\
&\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial\beta}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial U}{\partial\alpha}-\frac{Sh\alpha}{Ch\alpha+\cos\beta_1}U+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\sin\beta_1}{Ch\alpha+\cos\beta_1}V\right\}_{\beta=\beta'}=0,\\
&\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)+\frac{Sh\alpha}{Ch\alpha+\cos\beta_1}U\right\}_{\beta=\beta'}=0.
\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

Граничное условие на линии $\beta=\beta''$ расположенной в массиве рассматриваем как заделку

$$[U(\alpha,\beta_2)=0, \quad (-\alpha' \le \alpha \le \alpha'),] \qquad [V(\alpha,\beta_2)=0, \quad (-\alpha' \le \alpha \le \alpha')]. \qquad (21)$$

Уравнения упругости (19) совместно с граничными условиями (20) и (21) дают единственное решение задачи о напряженно - деформированном состоянии зуба. Для решения используем приближенный метод. Сечение зуба разбивается на конечное число элементов сеткой координатных линий с постоянным шагом $\Delta\alpha = \alpha*$ для $\alpha = const$ и $\Delta\beta = \beta*$ для $\beta = const$. Узел рассматриваем как центр конечного элемента, имеющего в биполярных координатах форму прямоугольника. Центральный узел *m* окружен узлами m_1,…, m_8 (рис. 5). В пределах элемента строится полином 4$^{\underline{ой}}$ степени для аппроксимация функции $f(\alpha, \beta)$

$$f(\alpha,\beta) = f_m + C_1\alpha + C_2\beta + C_3\alpha^2 + C_4\alpha\beta + C_5\beta^2 + C_6\alpha^2\beta + C_7\alpha\beta^2 + C_8\alpha^2\beta^2. \qquad (22)$$

Коэффициенты C_1, … C_8 выражаются через функции *f* в узлах m_1, … m_8. Полагаем

$$\left.\begin{aligned} &f(-\alpha^*;0) = f_{m1}, \quad f(\alpha^*,0) = f_{m_2} \quad f(0;-\beta^*) = f_{m_3}, \quad f(0;\beta^*) = f_{m_4}, \\ &f(-\alpha^*;-\beta^*) = f_{m_5}, \quad f(-\alpha^*;\beta^*) = f_{m_6}, \quad f(\alpha^*;\beta^*) = f_{m_7}, \quad f(\alpha^*;\beta^*) = f_{m_8}. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Подставляя в полином координаты угловых точек получим систему уравнений из которой определим коэффициенты С1,…,С8. Систему разобьем на две группы по 4е уравнения. Из первой группы уравнений находим коэффициенты:

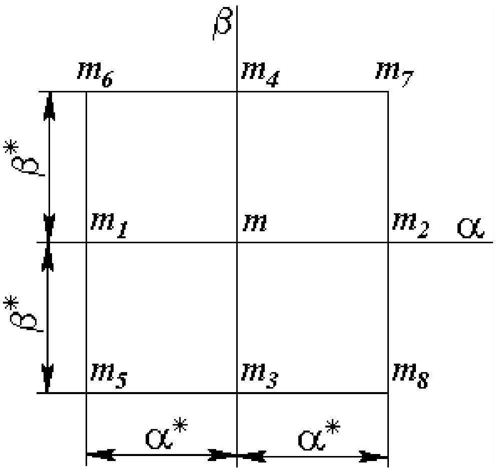

Рис. 5. Конечный элемент для аппроксимации упругих смещений

$$\left.\begin{aligned} f_{m1} &= f_m - C_1\alpha^* + C_3\alpha^{*2}, \\ f_{m2} &= f_m + C_1\alpha^* + C_3\alpha^{*2}, \\ f_{m3} &= f_m - C_2\beta^* + C_5\beta^{*2}, \\ f_{m4} &= f_m + C_2\beta^* + C_5\beta^{*2}, \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\alpha*}\left(\frac{f_{m2} - f_{m1}}{2}\right), \\ C_2 &= \frac{1}{\beta*}\left(\frac{f_{m4} - f_{m3}}{2}\right), \\ C_3 &= \frac{1}{\alpha^{*2}}\left(\frac{f_{m1} + f_{m2}}{2} - fm\right), \\ C_5 &= \frac{1}{\beta^{*2}}\left(\frac{f_{m3} + f_{m4}}{2} - fm\right). \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Используя решения первой группы уравнений, получаем вторую

$$\left.\begin{aligned} &C_4\alpha^*\beta^* - C_6\alpha^{*2}\beta^* - C_7\alpha^*\beta^{*2} + C_8\alpha^{*2}\beta^{*2} = f_{m_5} - f_m + C_1\alpha^* + C_2\beta^* - C_3\alpha^{*2} - C_5\beta^{*2}, \\ &-C_4\alpha^*\beta^* + C_6\beta^{*2}\alpha^* - C_7\alpha^*\beta^{*2} + C_8\alpha^{*2} = f_{m_6} - f_m + C_1\alpha^* - C_2\beta^* - C_3\alpha^{*2} - C_5\beta^{*2}, \\ &C_4\alpha^*\beta^* + C_6\alpha^{*2}\beta^* + C_7\alpha^*\beta^{*2} + C_8\alpha^{*2}\beta^{*2} = f_{m_7} - f_m - C_1\alpha^* - C_2\beta^* - C_3\alpha^{*2} - C_5\beta^{*2}, \\ &C_4\alpha^*\beta^* - G_6\alpha^{*2}\beta^* + C_7\alpha^*\beta^{*2} + C_8\alpha^{*2}\beta^{*2} f_{m_8} - f_m - C_1\alpha^* + C_2\beta^{*2} - C_3\alpha^{*2} - C_5\beta^{*2}. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Разрешая систему уравнений (26) и подставляя найденные значения C_1, C_2, C_3, C_5 из (25) получим формулы для коэффициентов C_4, C_6, C_7, C_8:

$$\left.\begin{aligned}
C_4 &= \frac{1}{4\alpha^*\beta^*}\left(f_{m_5} - f_{m_6} + f_{m_7} - f_{m_8}\right),\\
C_6 &= \frac{1}{2\alpha^{*2}\beta^*}\left[\left(f_{m_3} - f_{m_4}\right) - \frac{1}{2}\left(f_{m_5} - f_{m_6} - f_{m_7} + f_{m_8}\right)\right],\\
C_7 &= \frac{1}{2\alpha^*\beta^{*2}}\left[\left(f_{m_1} - f_{m_2}\right) - \frac{1}{2}\left(f_{m_5} + f_{m_6} - f_{m_7} - f_{m_8}\right)\right],\\
C_8 &= \frac{1}{\alpha^{*2}\beta^{*2}}\left[f_m - \frac{1}{2}\left(f_{m_1} + f_{m_2} + f_{m_3} + f_{m_4}\right) + \frac{1}{4}\left(f_{m_5} + f_{m_6} + f_{m_7} + f_{m_8}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Дифференцируя полином (22) по α и β и полагая $\alpha = 0, \quad \beta = 0$, получим частные производные функции *f* в центральной точке конечного элемента

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial \alpha} = C_1 = \frac{1}{\alpha^*}\left(\frac{f_{m_2} - f_{m_1}}{2}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \beta} = C_2 = \frac{1}{\beta^*}\left(\frac{f_{m_4} - f_{m_3}}{2}\right),\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 2C_3 = \frac{1}{\alpha^{*2}}\left(f_{m_1} + f_{m_2} - 2f_m\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_2} = 2C_5 = \frac{1}{\beta^{*2}}\left(f_{m_3} + f_{m_4} - 2f_m\right),\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} = C_4 = \frac{1}{4\alpha^*\beta^*}\left(f_{m_5} - f_{m_6} + f_{m_7} - f_{m_8}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

По формуле (28) получим дискретный аналог уравнений упругости (19)

$$\left.\begin{aligned}
&U_m\left[\frac{\left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right)\cos\beta_m - Ch\alpha_m}{(Ch\alpha_m + \cos\beta_m)} - \frac{2}{\alpha^{*2}}\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)\beta^{*2}}\right] + \frac{1}{\alpha^{*2}}\left(U_{m_1} + U_{m_2}\right) + \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)\beta^{*2}}\left(U_{m_3} + U_{m_4}\right) -\\
&-\frac{(3-4\nu)}{4(1-\nu)\alpha^*}\left(\frac{\sin\beta_m}{Ch\alpha_m + \cos\beta_m}\right)\left(V_{m_1} - V_{m_2}\right) - \frac{(3-4\nu)}{4(1-\nu)\beta^*}\left(\frac{Sh\alpha_m}{Ch\alpha_m + \cos\beta_m}\right)\left(V_{m_3} - V_{m_4}\right) +\\
&+\frac{1}{8(1-\nu)\alpha^*\beta^*}\times\left(V_{m_5} - V_{m_6} + V_{m_7} - V_{m_8}\right) = 0,\\
&V_m\left[\frac{\cos\beta_m - \left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right)Ch\,\alpha_m}{(Ch\,\alpha_m + \cos\,\beta_m} - \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)\alpha^{*2}} - \frac{2}{\beta^{*3}}\right] +\\
&+\left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)\alpha^{*2}}\right)\times\left(V_{m_1} + V_{m_2}\right) + \frac{1}{\beta^{*2}}\left(V_{m_3} + V_{m_4}\right) - \frac{(3-4\nu)}{4(1-\nu)\alpha^*}\left(\frac{\sin\beta_m}{Ch\alpha_m + \cos\beta_m}\right)\times\left(U_{m_2} - U_{m_1}\right) -\\
&-\frac{(3-4\nu)}{4(1-\nu)\beta^*}\left(\frac{Sh\alpha_m}{Ch\alpha_m + \cos\beta_m}\right)\left(U_{m_4} - U_{m_3}\right) + \frac{1}{8(1-\nu)\alpha^*\beta^*}\left(U_{m_5} - U_{m_6} + U_{m_7} - U_{m_8}\right) = 0
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

После замены производных в формулах (18) выражениями по формулам (28), получаем дискретный аналог компонент тензора напряжений:

$$\left.\begin{aligned}
(\sigma_\alpha)_m &= \frac{(1-\nu)\cdot E\cdot(Ch\,\alpha_m+\cos\beta_m)}{2(1+\nu)(1-2\nu)\cdot a}\left[\frac{1}{\alpha^*}(U_{m_2}-U_{m_1})+(U_{m_4}-U_{m_3})\times\right.\\
&\left.\times\left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)\frac{1}{\beta^*}\right]+\frac{(1-\nu)\cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)a}\left[V_m Sin\,\beta_m-\frac{1}{1-\nu}U_m Sh\,\alpha_m\right],\\
(\sigma_\beta)_m &= \frac{(1-\nu)\cdot E(Ch\,\alpha_m+\cos\beta_m)}{2(1+\nu)(1-2\nu)\cdot a}\left[\frac{1}{\beta^*}(V_{m_4}-V_{m_3})+(U_{m_2}-U_{m_1})\times\right.\\
&\left.\times\frac{1}{\alpha^*}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)\right]-\frac{(1-\nu)\cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)\cdot a}\left[U_m Sh\,\alpha_m-\frac{\nu}{1-\nu}V_m\sin\beta_m\right],\\
(\tau_{\alpha\beta})_m &= \frac{E(Ch\alpha_m+\cos\beta_m)}{4(1+\nu)\cdot a}\left[\frac{1}{\beta^*}(U_{m_4}-U_{m_3})+\frac{1}{\alpha^*}(U_{m_2}-U_{m_1})\right]+\\
&+\frac{E}{2(1+\nu)\cdot a}(V_m Sh\alpha_m-U_m\sin\beta_m).
\end{aligned}\right\}\qquad(30)$$

В соответствии с полученным решением задачи упругости и с помощью разработанного метода решения уравнений упругости, выполнен расчет напряженного состояния зубьев редуктора ПК-500, (табл. 1, 2) механизма поворота шагающего экскаватора ЭШ6,5×45. Ёмкость ковша экскаватора ЭШ 6,5×45 составляет *6,5 м*^{3}, вылет стрелы *45 м* (рис. 6 – 10).

Таблица 1. Параметры редуктора ПК-500 поворота шагающего экскаватора ЭШ 6,5×45

Наименование параметров	Значение параметров	
	I ступени	II ступени
Числа зубьев на сателлите	24	20
Числа зубьев на солнечном колесе	25	20
Число роликов	25	20
Диаметр роликов, мм	50	50
Радиус образующей зубьев сателлита, мм	26	31
Радиус образующей зубьев солнечного колеса, мм	26	31
Диаметр центров образующих зубьев сателлита, мм	504	500
Диаметр центров образующих зубьев солн. колеса, мм	525	500
Диаметр вершин зубьев сателлита, мм	504	487,5
Диаметр вершин зубьев солнечного колеса, мм	530	512,5
Ширина зубчатых венцов, мм	250	125
Эксцентриситет установки сателлита ε, мм	12	
Габаритнае размеры, мм	1585×1340×1420	
Передаточное число редуктора	24	
Максимальный крутящий момент, $M_{2\,max}$, Нм	65000	
Номинальный крутящий момент M_2, Нм	45000	
Нагрузка	реверсивная	
Масса редуктора, кг	4295	
Мощность электродвигателя, кВт	150	
Частота вращения, об/мин	750	
Смазка редуктора	жидкая, циркуляционная	
Рекомендуемый сорт масла	МС-20, МК-22	
Объём заливаемого масла, дм^3	160	

При составлении дискретных уравнений упругости каждый узел координатной сетки рассматривается как центр конечного элемента. Для включения в расчет граничных точек контура применяется искусственный прием. Наряду с координатными линиями принадлежащими сечению проводятся координатные линии вне контура с тем же шагом, что и внутри контура. Точки пересечения дополнительных координатных линий образуют фиктивные узлы. В результате число уравнений упругости будет меньше числа неизвестных перемещений узлов, т. к. в уравнения войдут дополнительные неизвестные, соответствующие перемещениям фиктивных узлов.

Таблица 2. Компоненты тензора напряжений в узлах зуба сателлита редуктора ПК-500

№ узла	Напряжение, МПа			№ узла	Напряжение, МПа		
	σ_α	σ_β	$\tau_{\alpha\beta}$		σ_α	σ_β	$\tau_{\alpha\beta}$
1	0	0	0	22	0	–1,8	0
2	–3.0	0	0	23	–1,0	0,7	4,3
3	–9,3	0	0	24	0,8	1,9	5,2
4	–12,4	0	0	25	1,2	2,0	7,5
5	–5,7	0	0	26	1,0	4,0	4,6
6	–0,2	0	0	27	1,2	5,1	3,1
7	0	0	0	28	0	12,6	0
8	0	–0,4	0	29	0	–7,1	0
9	–9,6	13,7	6,2	30	–1,5	–2,7	2,1
10	–12.9	–2,6	4,9	31	–0,04	–0,4	2,8
11	–16,7	–3,6	2,9	32	0,5	1,9	2,0
12	–22,4	–1.4	1,5	33	1,2	4,3	1,6
13	12	–2,6	2,8	34	1,9	8,0	0,8
14	–42,0	–7,0	0	35	0	13,5	0
15	0	8,9	0	36	0	–4,5	0
16	–0,4	7,5	4,7	37	–1,3	–2,3	–1,1
17	–1,7	5,0	7,0	38	–0,2	–0,6	–0,1
18	–2,9	2,3	7,4	39	0,3	1,5	0,3
19	–3.6	1,1	7,4	40	0,7	3,7	–0,2
20	–3,1	4,7	6,7	41	1,0	5,8	–0,9
21	0	3,0	0	42	0	8,5	0

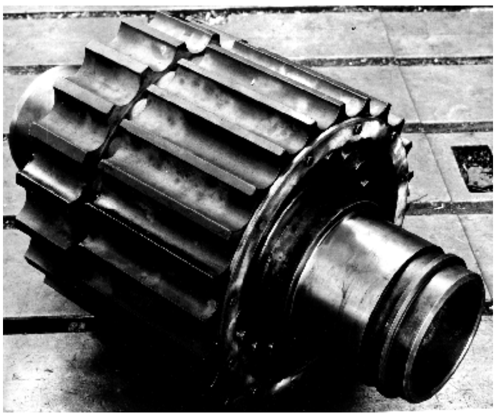

Рис. 6 Сателлит в сборе редуктора ПК-500

Для получения дополнительных уравнений записываются граничные условия. В случае когда граничные условия заданы в перемещениях, часть неизвестных будет определена сразу. Если граничные условия заданы в напряжениях, то дополнительные уравнения получают при помощи формул (30). С помощью дополнительных уравнений исключают фиктивные неизвестные, либо присоединяют дополнительные уравнения к основным уравнениям и решают расширенную систему уравнений. Из решения системы уравнений определяются перемещения основных и фиктивных узловых точек. Напряженное состоя-

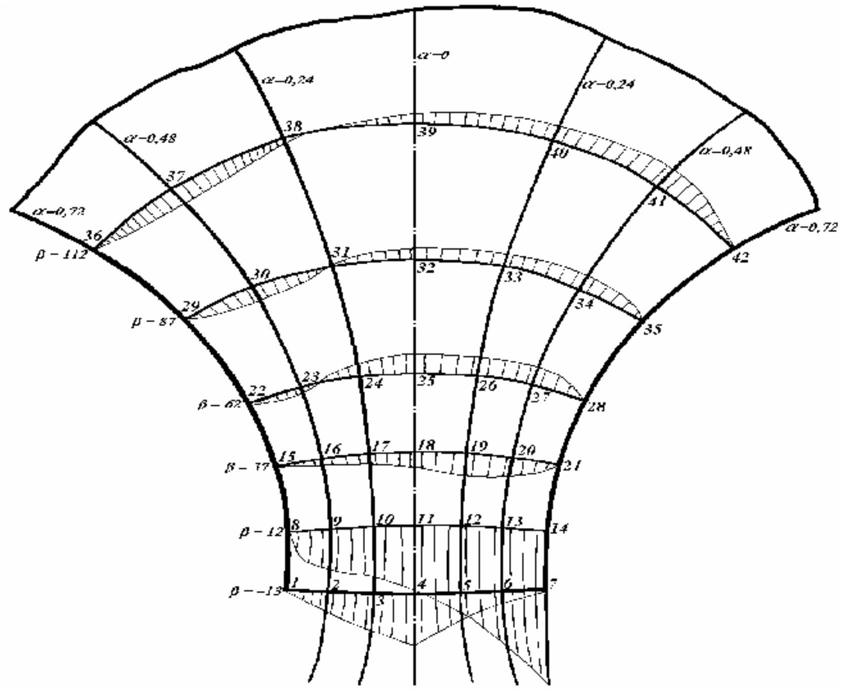

Рис. 7. Эпюра напряжений σ_α в сечении зуба на линиях β = *const*

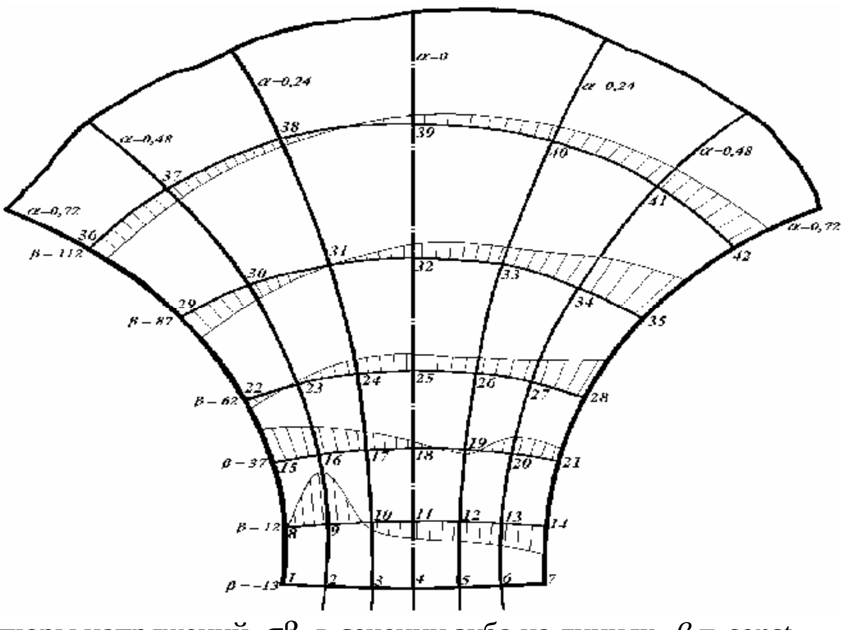

Рис. 8. Эпюры напряжений $\sigma\beta$ в сечении зуба на линиях β = *const*

ние в узлах определяют по формулам (30). Местные напряжения, возникающие в зубе при изгибе, можно определить численным методом, удачно выполненным в работе [4].

Со стороны ролика действует нормальная контактная нагрузка, распределенная по активной поверхности зуба между узлами «7» и «21» с центром давления в узловой точке «14». Величина шага координатной сетки по переменным α и β принята равной $\alpha^* = 0{,}24$; $\beta^* = 0{,}436332$ *рад.* Компоненты тензора напряжений вычислялись последовательно по каждому узлу. Контактное давление соответствует нагрузке N = 318,8 кН/м.

$$\left(\sigma_{\alpha_{\max}}\right)_{\langle 14\rangle} = -42\text{мПа};$$

$$\left(\sigma_{\beta_{\max}}\right)_{\langle 9\rangle} = 13{,}7\text{мПа};$$

$$\left(\tau_{\alpha\beta_{\max}}\right)_{\langle 25\rangle} = 7{,}5\text{мПа}.$$

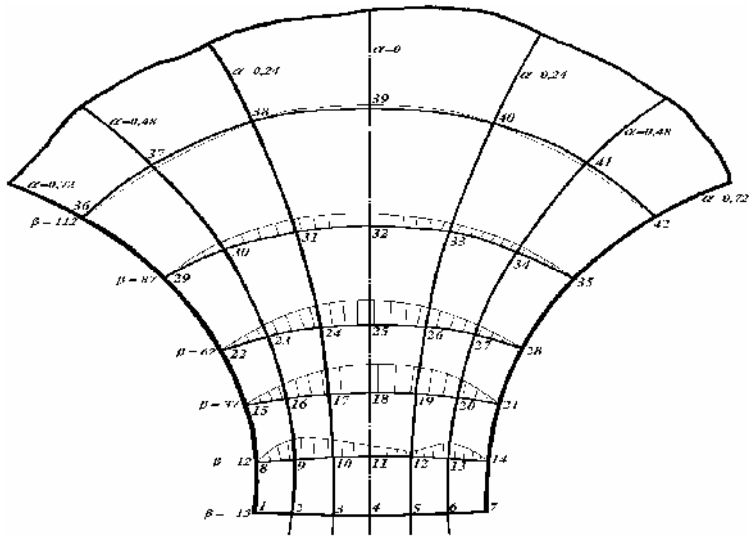

Рис. 9. Эпюры напряжений $\tau_{\alpha\beta}$ в сечении зуба на линиях $\beta = const$

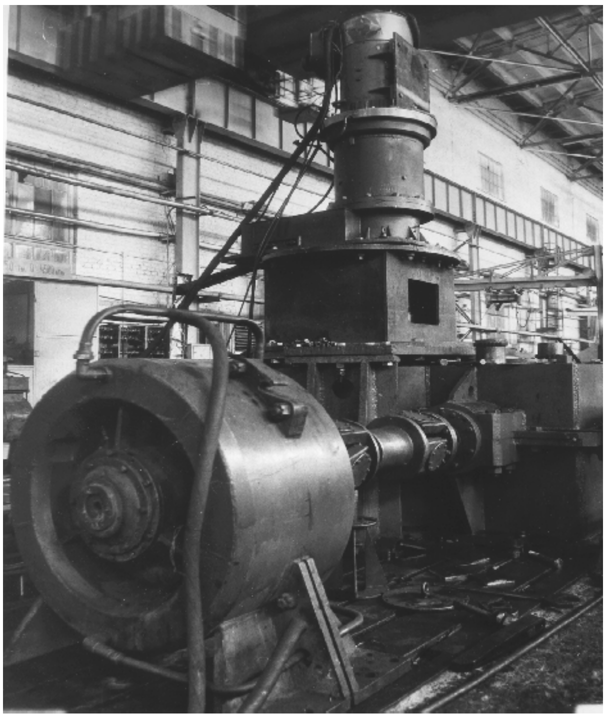

Рис. 10. Испытательный стенд редуктора с промежуточными телами качения ПК-500 механизма поворота шагающего экскаватор ЭШ6,5×45

Выводы. Решена задача теории упругости о плоско - деформированном состоянии круговых зубьев. Разработана расчётная модель с аппроксимацией профиля зуба координатными линиями биполярной системы координат, что в отличие от известных расчётных схем, позволило упростить вывод уравнений упругости, учестьраспределение по профилю зуба контактного давления, полученного из решения контактной задачи и получить единственное решение задачи о напряжённо – деформированном состоянии зуба с учётом граничных условий. Это повысило точность постановки и решения граничной задачи прочностного расчёта зуба. Расчеты реализованы в редукторах поворота шагающего экскаватора ЭШ 6,5×45.

Выполнен прочностной расчёт зуба сателлита редуктора поворота шагающего экскаватора ЭШ6,5×45, в результате чего установлено:

— Преобладающими являются напряжения сжатия σ_α $\left(\sigma_{\alpha_{\max}} = 42\, мПа\right)$, действующие вблизи зоны контакта, они затухают по мере приближения к корню зуба.

— Напряжения σ_β $\left(\sigma_{\beta_{\max}} = 13{,}5\, мПа\right)$ являются аналогом нормальных напряжений в теории изгиба балок. Однако уровень этих напряжений значительно ниже, определенных по элементарной теории. Это обусловлено благоприятной формой зуба с точки зрения прочностных свойств: сечение зуба резко увеличивается по направлению к его корню.

— Касательные напряжения $\tau_{\alpha\beta}$ $\left(\tau_{\alpha\beta_{\max}} = 7{,}5\, мПа\right)$действуют в основном в зоне контакта. Их уровень сравним с уровнем напряжений σ_β.

— Общий уровень напряжений в зубе при передаче заданного усилия *N = 318,8 кН/м* невысокий. Так как зона приложения контактной нагрузки невелика, то с достаточной точностью можно считать, что напряженное состояние будет расти пропорционально усилию *N*. Нагрузка на зуб может быть увеличена в несколько раз.

Выполненные исследования позволяют привести в соответствие условия контактного взаимодействия промежуточных тел качения в зацеплении с напряжённо – деформированным состоянием зубьев и их общей прочностью.

Список литературы:

1. VDMA Antriebstechnik und Fluidtechnik befinden sich auf Wachstumskurs. Ind.-Anz. – 2000. – 122, № 45. – С. 3.

2. Wachstumspotenzial fur Getriebe und Getriebemotoren. HTM: Hdrter. - tectm. Mitt. – 2002. – 57, №6. – С. 16 - 17.

3. Стрельников В.Н. Расчёт зубьев кругового профиля на прочность / В.Н. Стрельников // Опыт исследования, проектирования, изготовления и эксплуатации передач Новикова: тезисы докладов. Межреспубликанской научно-технической конференции – Рига: ЛРП ВНТОМ. – 1989. – С. 31-33.

4. Иосилевич Г.Б. Применение численных методов решения задач теории упругости к расчёту зубчатых передач / Г.Б. Иосилевич, Г.В. Осипова // Вестник машиностроения. – 1976. – № 4. – С. 19 - 23.

Надійшла до редколегії 20.02.2012.

В. М. Стрельніков, М. Д. Воробйов, Ю. В.Стрельніков

МІЦНІСНИЙ РОЗРАХУНОК ЗУБІВ ІЗ КРУГОВИМ ПРОФІЛЕМ

У статті викладений міцнісний розрахунок зубів кругового профілю виконаний методом кінцевих елементів. Напружений стан зубів представлений у біполярних системах координат, що дозволило одержати рішення не тільки для масиву зуба, але й для околиць його контуру.

Ключові слова: *сателіт, ролик, поверхня, зуб, пружність, модель, розрахунок.*

V. N. Strelnikov, N. D. Vorobiov, Y. V. Strelnikov

CALCULATION TEETH DURABILITY OF SPIRAL BEVEL GEAR

Calculation teeth durability of a spiral bevel gears executed by a finite element method is stated in a paper. The tension of teeth in bipolar frames that has allowed to receive the decision not only for a cog array, but also for environs of its head loop is presented.

Keywords: *the satellite, a roll, a surface, a teeth, elasticity, model, calculation.*