УДК 514.853

В.Н. Стрельников
ЗАО «НКМЗ г. Краматорск, Украина
+38 (06272) 2-53-91; Факс: +38 (06264) 7-22-49; E-mail: rs@nkmz.donetsk.ua

ДВИЖЕНИЕ ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ ГЕЛИКОИДА В УСЛОВИЯХ НЕГОЛОНОМНОЙ СВЯЗИ

Получена система дифференциальных уравнений, описывающих качение эллипсоида по поверхности геликоида в поле силы тяжести. Задача решена для неголономной связи одноточечного контакта идеально шероховатых поверхностей. В качестве обобщенных координат приняты угловые величины, описывающие положение точки контакта, и углы Эйлера, определяющие положение эллипсоида на винтовой поверхности. Обоснованы начальные и граничные условия.
Ключевые слова: *эллипсоид, геликоид, неголономная связь, обобщенные координаты, углы Эйлера, уравнения Аппеля.*

Введение

Задача качения тела по поверхности является одной из задач механики неголономных систем [1 – 3]. Для решения задач подобного класса П. Аппелем [4], П. В. Воронцом [5], И. Ценовым [6, 7], С. А. Чаплыгиным [8] были получены специальные уравнения, решены ряд задач об устойчивости движения колесных систем: шасси самолета [9], скаты автомобиля, колеса локомотива, а также задачи качения различных тел: качение шара и эллипсоида по плоскости [10], движение шара в цилиндре и конусе.

В данной работе использованы уравнения Аппеля, получены дифференциальные уравнения, описывающие качение эллипсоида по винтовой поверхности.

Основное содержание и результаты работы

Определим положение текущей точки контакта *M* эллипсоида с поверхностью геликоида в инерционной системе координат $x\,y\,z$ (рис. 1)

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{h}{2\pi}\cos\alpha\cos\varphi\,ctg\,\nu, \\ y_M &= \frac{h}{2\pi}\cos\alpha\sin\varphi\,ctg\,\nu, \\ z_M &= \frac{h}{2\pi}\left(\varphi+\sin\alpha\,ctg\,\nu\right), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $\alpha-$ угол наклона образующей поверхности геликоида к плоскости перпендикулярной его оси; h – шаг винта; φ – полярная координата; $\nu -$угловая координата.

Точка *M* является началом подвижной системы координат $X\,Y\,Z$. Ось *X* направлена по образующей геликоида и проходит через точку *M*, ось *Z* по нормали к поверхности, так, что образует острый угол с осью *z*.

В центре масс эллипсоида *C* расположим системы координат $X'\,Y'\,Z'$ и $x^*\,y^*\,z^*$. При этом $X' /\!/ X$, $Y' /\!/ Y$, $Z' /\!/ Z$, ось z^* направим по оси симметрии эллипсоида, а ось

x^* расположим перпендикулярно осям Z' и z^* так, чтобы кратчайший угол поворота от Z' к z^*, при наблюдении со стороны положительного направления оси x^*, был

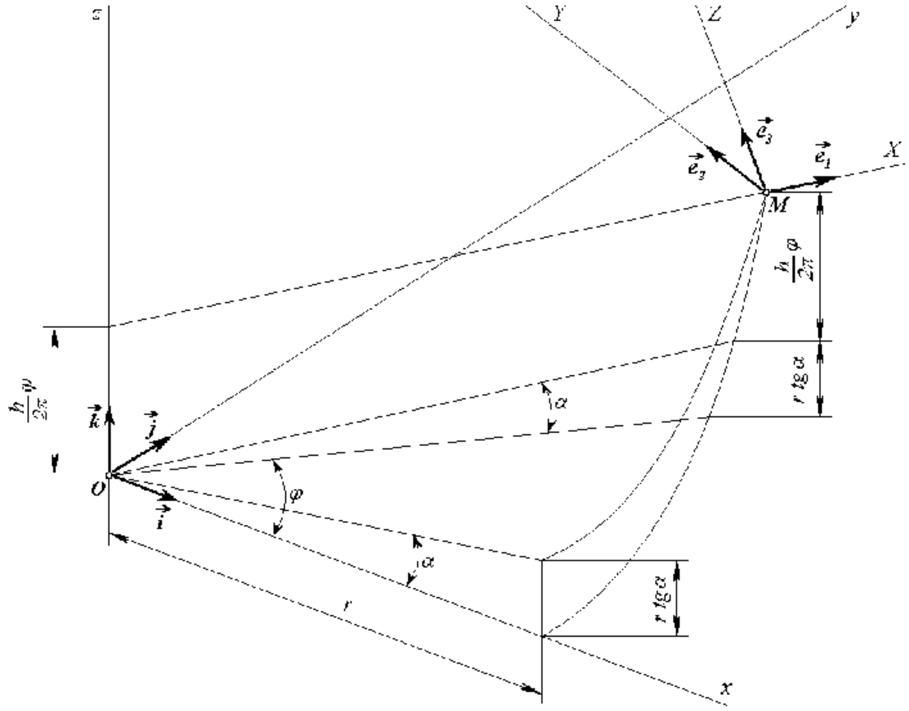

Рис. 1. Положение точки контакта относительно неподвижных координат

острым. Связь между ортами $\vec{i}^*$, $\vec{j}^*$, $\vec{k}^*$ системы $x^* \, y^* \, z^*$ и ортами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ определяется углами Эйлера θ, ψ, φ^* (рис. 2). Угол собственного вращения φ^* является циклической координатой.

Вектор $\overrightarrow{MC}$ расположен в плоскости $Z'C\,z^*$

$$\vec{r}_{MC} = \frac{a\varepsilon^2 \sin\theta \cos\theta \sin\psi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}} \vec{e}_1 - \frac{a\varepsilon^2 \sin\theta \cos\theta \cos\psi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}} \vec{e}_2 + a\,\vec{e}_3 \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}, \qquad (2)$$

где $a-$ длина большой полуоси эллипсоида; $\varepsilon-$эксцентриситет.

Определим радиус – вектор $\vec{r}_C$ в разложении по ортам инерциальной системы координатах $x\,y\,z$

$$x_C = \frac{h}{2\pi} \cos\alpha \cos\varphi \,ctg\,\nu + \frac{a}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}} (\sin\varphi \sin\nu - \sin\alpha \cos\varphi \cos\nu) +$$

$$+ \frac{a\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}} \Big\{ \sin\theta \cos\theta \; [\cos\alpha \cos\varphi \sin\psi + \cos\psi (\sin\varphi \cos\nu +$$

$$+ \sin\alpha \cos\varphi \sin\nu)] - \sin^2\theta \,(\sin\varphi \sin\nu - \sin\alpha \cos\varphi \cos\nu) \Big\},$$

$$y_C = \frac{h}{2\pi} \cos\alpha \sin\varphi \, ctg\,\nu - a\left(\cos\varphi \sin\nu + \sin\alpha \sin\varphi \cos\nu\right)\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta} +$$

$$+\frac{a\varepsilon^2 \sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\left[\cos\alpha \sin\varphi \sin\psi - \cos\psi\left(\cos\varphi\cos\nu - \sin\alpha\sin\varphi\sin\nu\right)\right],$$

$$z_C = \frac{h}{2\pi}\left(\varphi + \sin\alpha \, ctg\,\nu\right) + a\cos\alpha\cos\nu\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta} +$$

$$+\frac{a\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\left(\sin\alpha\sin\psi - \cos\alpha\cos\psi\sin\nu\right). \quad (3)$$

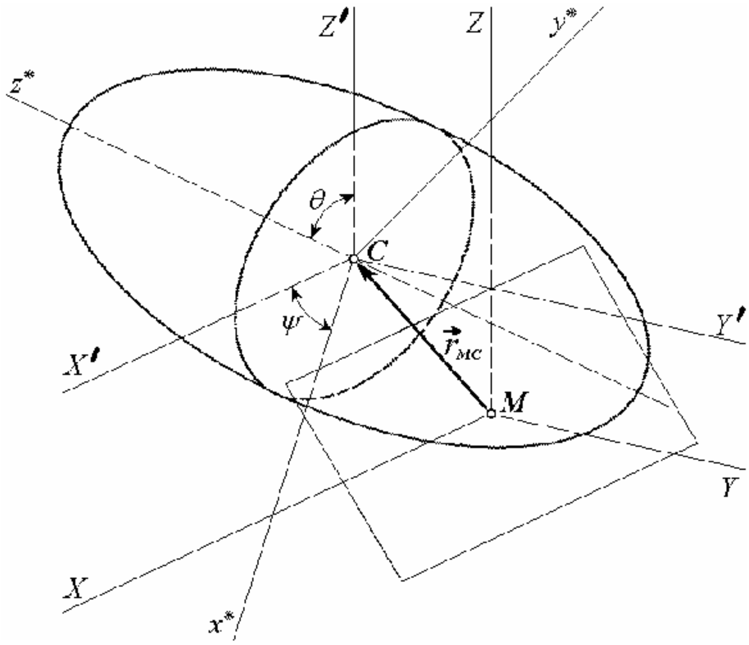

Рис. 2. Положение эллипсоида на поверхности геликоида

Дифференцируя по времени выражения (3), найдем составляющие вектора скорости и вектора ускорения центра масс эллипсоида, точки C

$$\left.\begin{aligned}
V_{C_x} &= a\tilde{V}_{C_x} = a\tilde{A}_{x_\varphi}\dot{\varphi} + a\tilde{A}_{x_\nu}\dot{\nu} + a\tilde{A}_{x_\theta}\dot{\theta} + a\tilde{A}_{x_\psi}\dot{\psi},\\
V_{C_y} &= a\tilde{V}_{C_y} = a\tilde{A}_{y_\varphi}\dot{\varphi} + a\tilde{A}_{y_\nu}\dot{\nu} + a\tilde{A}_{y_\theta}\dot{\theta} + a\tilde{A}_{y_\psi}\dot{\psi},\\
V_{C_z} &= a\tilde{V}_{C_z} = a\tilde{A}_{z_\varphi}\dot{\varphi} + a\tilde{A}_{z_\nu}\dot{\nu} + a\tilde{A}_{z_\theta}\dot{\theta} + a\tilde{A}_{z_\psi}\dot{\psi},
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

где коэффициенты при $\dot{\varphi}, \dot{\nu}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ определяются по формулам

$$\tilde{A}_{x_\varphi} = -\frac{h}{2\pi a}\cos\alpha\sin\varphi\, ctg\,\nu + \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\left\langle\left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)\left(\cos\varphi\sin\nu + \sin\alpha \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sin\varphi\cos\nu\right) - \varepsilon^2\sin\theta\cos\theta\left[\cos\alpha\sin\varphi\sin\psi - \cos\psi\left(\cos\varphi\cos\nu - \cos\alpha\sin\varphi\sin\nu\right)\right]\right\rangle,$$

$$\tilde{A}_{x_\nu} = -\frac{h}{2\pi a}\frac{\cos\alpha\cos\varphi}{\sin^2\nu} + \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\Big\langle\left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)(\sin\varphi\cos\nu +$$

$$+\sin\alpha\cos\varphi\sin\nu) + \varepsilon^2\sin\theta\cos\theta\cos\psi\,(\sin\alpha\cos\varphi\cos\nu - \sin\varphi\sin\nu)\Big\rangle,$$

$$\tilde{A}_{x_\theta} = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\left\langle\left(\cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\right)[\cos\alpha\cos\varphi\sin\psi + \cos\psi\times\right.$$

$$\left.\times(\sin\varphi\cos\nu + \sin\alpha\cos\varphi\sin\nu)] - \sin\theta\cos\theta\,(\sin\varphi\sin\nu - \sin\alpha\cos\varphi\cos\nu)\right\rangle,$$

$$\tilde{A}_{x_\psi} = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\langle\cos\alpha\cos\varphi\cos\psi - \sin\psi(\sin\varphi\cos\nu + \sin\alpha\cos\varphi\sin\nu)\rangle,$$

$$\tilde{A}_{y_\varphi} = \frac{h}{2\pi a}\cos\alpha\cos\varphi\,ctg\,\nu + \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\Big\langle\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta\,[\cos\alpha\cos\varphi\sin\psi +$$

$$+\cos\psi\,(\sin\varphi\cos\nu + \sin\alpha\cos\varphi\sin\nu)] + \left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)(\sin\varphi\sin\nu - \sin\alpha\cos\varphi\cos\nu)\Big\rangle.$$

$$\tilde{A}_{y_\nu} = -\frac{h}{2\pi a}\frac{\cos\alpha\sin\varphi}{\sin^2\nu} + \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\Big\langle\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta\cos\psi\,(\cos\varphi\sin\nu +$$

$$+\sin\alpha\sin\varphi\cos\nu) - \left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)(\cos\varphi\cos\nu - \sin\alpha\sin\varphi\sin\nu)\Big\rangle,$$

$$\tilde{A}_{y_\theta} = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\left\langle\left(\cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\right)[\cos\alpha\sin\varphi\sin\psi - \cos\psi\times\right.$$

$$\left.\times(\cos\varphi\cos\nu - \sin\alpha\sin\varphi\sin\nu)] + \sin\theta\cos\theta\,(\cos\varphi\sin\nu + \sin\alpha\sin\varphi\cos\nu)\right\rangle,$$

$$\tilde{A}_{y_\psi} = \frac{\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\langle\cos\alpha\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi(\cos\varphi\cos\nu - \sin\alpha\sin\varphi\sin\nu)\rangle,$$

$$\tilde{A}_{z_\varphi} = \frac{h}{2\pi a},$$

$$\tilde{A}_{z_\nu} = -\frac{h}{2\pi a}\frac{\sin\alpha}{\sin^2\nu} - \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\Big\langle\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta\cos\nu\cos\psi\cos\alpha +$$

$$+\left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)\cos\nu\cos\alpha\Big\rangle,$$

$$\tilde{A}_{z_\theta} = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\left\langle\left(\cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\right)(\sin\psi\sin\alpha -\right.$$

$$\left.-\cos\psi\cos\nu\cos\alpha) - \sin\theta\cos\theta\cos\nu\cos\alpha\right\rangle,$$

$$\tilde{A}_{z_\psi} = \frac{\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}(\sin\alpha\cos\psi + \cos\alpha\sin\nu\sin\psi). \qquad (5)$$

Составляющие вектора ускорения центра масс эллипсоида

$$a_{C_x} = \dot{V}_{C_x} = a\tilde{A}_{x_\varphi}\ddot{\varphi} + a\tilde{A}_{x_\nu}\ddot{\nu} + a\tilde{A}_{x_\theta}\ddot{\theta} + a\tilde{A}_{x_\psi}\ddot{\psi} + a\dot{\tilde{A}}_{x_\varphi}\dot{\varphi} + a\dot{\tilde{A}}_{x_\nu}\dot{\nu} + a\dot{\tilde{A}}_{x_\theta}\dot{\theta} + a\dot{\tilde{A}}_{x_\psi}\dot{\psi},$$

$$a_{C_y} = \dot{V}_{C_y} = a\tilde{A}_{y_\varphi}\ddot{\varphi} + a\tilde{A}_{y_\nu}\ddot{\nu} + a\tilde{A}_{y_\theta}\ddot{\theta} + a\tilde{A}_{y_\psi}\ddot{\psi} + a\dot{\tilde{A}}_{y_\varphi}\dot{\varphi} + a\dot{\tilde{A}}_{y_\nu}\dot{\nu} + a\dot{\tilde{A}}_{y_\theta}\dot{\theta} + a\dot{\tilde{A}}_{y_\psi}\dot{\psi},$$

$$a_{C_z} = \dot{V}_{C_z} = a\tilde{A}_{z_\varphi}\ddot{\varphi} + a\tilde{A}_{z_\nu}\ddot{\nu} + a\tilde{A}_{z_\theta}\ddot{\theta} + a\tilde{A}_{z_\psi}\ddot{\psi} + a\dot{\tilde{A}}_{z_\varphi}\dot{\varphi} + a\dot{\tilde{A}}_{z_\nu}\dot{\nu} + a\dot{\tilde{A}}_{z_\theta}\dot{\theta} + a\dot{\tilde{A}}_{z_\psi} \qquad (6)$$

Дифференцируем выражения (5), подставляем в равенства (6) и получаем составляющие вектора ускорения центра масс эллипсоида в инерциальной системе координат $x\ y\ z$

$$a_{C_x} = a\tilde{A}_{x_\varphi}\ddot{\varphi} + a\tilde{A}_{x_\nu}\ddot{\nu} + a\tilde{A}_{x_\theta}\ddot{\theta} + a\tilde{A}_{x_\psi}\ddot{\psi} + a\tilde{A}_{x_{\theta\theta}}\dot{\theta}^2 + a\tilde{A}_{x_{\varphi\varphi}}\dot{\varphi}^2 + a\tilde{A}_{x_{\nu\nu}}\dot{\nu}^2 + a\tilde{A}_{x_{\psi\psi}}\dot{\psi}^2 +$$
$$+ a\tilde{A}_{x_{\theta\varphi}}\dot{\theta}\dot{\varphi} + a\tilde{A}_{x_{\theta\nu}}\dot{\theta}\dot{\nu} + a\tilde{A}_{x_{\theta\psi}}\dot{\theta}\dot{\psi} + a\tilde{A}_{x_{\nu\varphi}}\dot{\nu}\dot{\varphi} + a\tilde{A}_{x_{\varphi\psi}}\dot{\varphi}\dot{\psi} + a\tilde{A}_{x_{\nu\psi}}\dot{\nu}\dot{\psi},$$

$$a_{C_y} = a\tilde{A}_{y_\varphi}\ddot{\varphi} + a\tilde{A}_{y_\nu}\ddot{\nu} + a\tilde{A}_{y_\theta}\ddot{\theta} + a\tilde{A}_{y_\psi}\ddot{\psi} + a\tilde{A}_{y_{\theta\theta}}\dot{\theta}^2 + a\tilde{A}_{y_{\varphi\varphi}}\dot{\varphi}^2 + a\tilde{A}_{y_{\nu\nu}}\dot{\nu}^2 + a\tilde{A}_{y_{\psi\psi}}\dot{\psi}^2 +$$
$$+ a\tilde{A}_{y_{\theta\varphi}}\dot{\theta}\dot{\varphi} + a\tilde{A}_{y_{\theta\nu}}\dot{\theta}\dot{\nu} + a\tilde{A}_{y_{\theta\psi}}\dot{\theta}\dot{\psi} + a\tilde{A}_{y_{\nu\varphi}}\dot{\nu}\dot{\varphi} + a\tilde{A}_{y_{\varphi\psi}}\dot{\varphi}\dot{\psi} + a\tilde{A}_{y_{\nu\psi}}\dot{\nu}\dot{\psi},$$

$$a_{C_z} = a\tilde{A}_{z_\varphi}\ddot{\varphi} + a\tilde{A}_{z_\nu}\ddot{\nu} + a\tilde{A}_{z_\theta}\ddot{\theta} + a\tilde{A}_{z_\psi}\ddot{\psi} + a\tilde{A}_{z_{\theta\theta}}\dot{\theta}^2 + a\tilde{A}_{z_{\varphi\varphi}}\dot{\varphi}^2 + a\tilde{A}_{z_{\nu\nu}}\dot{\nu}^2 + a\tilde{A}_{z_{\psi\psi}}\dot{\psi}^2 +$$
$$+ a\tilde{A}_{z_{\theta\varphi}}\dot{\theta}\dot{\varphi} + a\tilde{A}_{z_{\theta\nu}}\dot{\theta}\dot{\nu} + a\tilde{A}_{z_{\theta\psi}}\dot{\theta}\dot{\psi} + a\tilde{A}_{z_{\nu\varphi}}\dot{\nu}\dot{\varphi} + a\tilde{A}_{z_{\varphi\psi}}\dot{\varphi}\dot{\psi} + a\tilde{A}_{z_{\nu\psi}}\dot{\nu}\dot{\psi}. \qquad (7)$$

Запишем выражения коэффициентов слагаемых в формулах (7) при произведениях первых производных

$$\tilde{A}_{x_{\theta\theta}} = -\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\left\{\sin 2\theta\left(2-\frac{3}{2}\frac{\varepsilon^2\cos 2\theta}{\left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)}-\frac{3}{8}\frac{\varepsilon^4\sin^2 2\theta}{\left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)^2}\right)\times\right.$$
$$\times\left[\cos\alpha\cos\varphi\sin\psi+\cos\psi\left(\sin\varphi\cos\nu+\sin\alpha\cos\varphi\sin\nu\right)\right]+$$
$$\left.\left(\cos 2\theta+\frac{\varepsilon^2\sin^2 2\theta}{4\left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)}\right)\left(\sin\varphi\sin\nu-\sin\alpha\cos\varphi\cos\nu\right)\right\},$$

$$\tilde{A}_{x_{\varphi\varphi}} = -\frac{h}{2\pi a}\cos\alpha\cos\varphi\,ctg\,\nu+\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\left\{\left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)\left(\sin\alpha\cos\varphi\cos\nu-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sin\varphi\sin\nu\right)-\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta\left[\cos\alpha\cos\varphi\sin\psi++\cos\psi\left(\sin\varphi\cos\nu+\sin\alpha\cos\varphi\sin\nu\right)\right]\right\},$$

$$\tilde{A}_{x_{\nu\nu}} = \frac{h\cos\alpha\cos\nu\cos\varphi}{\pi a\sin^3\nu}+\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\left\{\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta\left[\cos\psi\left(\cos\varphi\cos\nu-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\sin\alpha\sin\varphi\sin\nu\right)+\left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)\left(\cos\varphi\sin\nu+\sin\alpha\sin\varphi\cos\nu\right)\right\},$$

$$\tilde{A}_{x_{\psi\psi}} = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\left[\cos\psi\left(\cos\varphi\cos\nu-\sin\alpha\sin\varphi\sin\nu\right)-\sin\psi\sin\varphi\cos\alpha\right],$$

$$\tilde{A}_{x_{\varphi\theta}} = \frac{2\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\left\{\left[\cos 2\theta+\frac{\varepsilon^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\right]\left[\cos\alpha\cos\varphi\sin\psi+\cos\psi\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\sin\varphi\cos\nu+\sin\alpha\cos\varphi\sin\nu\right)\right]-\sin\theta\cos\theta\left(\sin\varphi\sin\nu-\sin\alpha\cos\varphi\cos\nu\right)\right\},$$

$$\tilde{A}_{x_{\theta\nu}} = \frac{2\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}\left\{\left[\cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}\right]\cos\psi\,(\sin\alpha\cos\varphi\cos\nu -\right.$$
$$\left. -\sin\varphi\sin\nu) - \sin\theta\cos\theta\,(\sin\varphi\cos\nu + \sin\alpha\cos\varphi\sin\nu)\right\},$$

$$\tilde{A}_{x_{\theta\psi}} = \frac{2\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}\left(\cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}\right)[\cos\alpha\cos\varphi\cos\psi -$$
$$-\sin\psi\,(\sin\varphi\cos\nu + \sin\alpha\cos\varphi\sin\nu)],$$

$$\tilde{A}_{x_{\varphi\nu}} = \frac{h\cos\alpha\sin\varphi}{\pi a \sin^2\nu} + \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}\left\{\left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)(\cos\varphi\cos\nu -\right.$$
$$\left. -\sin\alpha\sin\varphi\sin\nu) - \varepsilon^2 \sin\theta\cos\theta\cos\psi\,(\cos\varphi\sin\nu + \sin\alpha\sin\varphi\cos\nu)\right\},$$

$$\tilde{A}_{x_{\varphi\psi}} = \frac{2\varepsilon^2 \sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}[\cos\alpha\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi(\cos\varphi\cos\nu - \sin\alpha\sin\varphi\sin\nu)],$$

$$\tilde{A}_{x_{\nu\psi}} = \frac{2\varepsilon^2 \sin\theta\cos\theta\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}\,(\sin\varphi\sin\nu - \sin\alpha\cos\varphi\cos\nu),$$

$$\tilde{A}_{y_{\theta\theta}} = -\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}\left\{-\sin 2\theta\left(2 - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon^2\cos 2\theta}{\left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)} - \frac{3}{8}\frac{\varepsilon^4 \sin^2 2\theta}{\left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)^2}\right)\times\right.$$
$$\times[\cos\alpha\sin\varphi\sin\psi - \cos\psi\,(\cos\varphi\cos\nu - \sin\alpha\sin\varphi\sin\nu)] +$$
$$\left.\left(\cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2 \sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\right)(\cos\varphi\sin\nu + \sin\alpha\sin\varphi\cos\nu)\right\},$$

$$\tilde{A}_{y_{\varphi\varphi}} = -\frac{h}{2\pi a}\cos\alpha\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\nu + \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}\left\{\left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)\times\right.$$
$$\times(\cos\varphi\sin\nu + \sin\alpha\sin\varphi\cos\nu) - \varepsilon^2\sin\theta\cos\theta\,[\cos\alpha\sin\varphi\sin\psi -$$
$$\left. -\cos\psi\,(\cos\varphi\cos\nu - \sin\alpha\sin\varphi\sin\nu)]\right\},$$

$$\tilde{A}_{y_{\nu\nu}} = \frac{h\cos\alpha\cos\nu\sin\varphi}{\pi a \sin^3\nu} + \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}\left\{\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta\cos\psi\,(\cos\varphi\cos\nu -\right.$$
$$\left. -\sin\alpha\sin\varphi\sin\nu) + \left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)(\cos\varphi\sin\nu + \sin\alpha\sin\varphi\cos\nu)\right\},$$

$$\tilde{A}_{y_{\psi\psi}} = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}[\cos\psi\,(\cos\varphi\cos\nu - \sin\alpha\sin\varphi\sin\nu) - \sin\psi\sin\varphi\cos\alpha],$$

$$\tilde{A}_{y_{\varphi\theta}} = \frac{2\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}\left\{\left[\cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}\right][\cos\alpha\cos\varphi\sin\psi + \cos\psi\times\right.$$
$$\left.\times(\sin\varphi\cos\nu + \sin\alpha\cos\varphi\sin\nu)] - \sin\theta\cos\theta\,(\sin\varphi\sin\nu - \sin\alpha\cos\varphi\cos\nu)\right\},$$

$$\tilde{A}_{y_{\theta\nu}} = \frac{2\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}\left\{\left[\cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta\cos^2\theta}\right]\cos\psi\,(\cos\varphi\sin\nu +\right.$$
$$\left. +\sin\alpha\sin\varphi\cos\nu) + \sin\theta\cos\theta\,(\cos\varphi\cos\nu - \sin\alpha\sin\varphi\sin\nu)\right\},$$

$$\tilde{A}_{y_{\theta\psi}} = \frac{2\,\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}\left(\cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}\right)[\cos\alpha\,\sin\varphi\,\cos\psi + $$
$$+\sin\psi\,(\cos\varphi\,\cos\nu - \sin\alpha\,\sin\varphi\,\sin\nu)],$$

$$\tilde{A}_{y_{\varphi\nu}} = -\frac{h\cos\alpha\,\cos\varphi}{2\pi a \sin^2\nu} + \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}\left\{\left(1-\varepsilon^2 \sin^2\theta\right)(\sin\varphi\,\cos\nu + \right.$$
$$\left. + \sin\alpha\cos\varphi\,\sin\nu) + \varepsilon^2 \sin\theta\cos\theta\cos\psi\,(\sin\alpha\,\cos\varphi\,\cos\nu - \sin\varphi\,\sin\nu)\right\},$$

$$\tilde{A}_{y_{\varphi\psi}} = \frac{2\,\varepsilon^2 \sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}[\cos\alpha\,\cos\varphi\cos\psi - \sin\psi(\sin\varphi\cos\nu + \sin\alpha\,\cos\varphi\,\sin\nu)],$$

$$\tilde{A}_{y_{\nu\psi}} = -\frac{2\,\varepsilon^2 \sin\theta\cos\theta\sin\psi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}(\cos\varphi\,\sin\nu + \sin\alpha\,\sin\varphi\cos\nu),$$

$$\tilde{A}_{z_{\theta\theta}} = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}\left\{2\sin\theta\cos\theta\left[2 - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon^2\cos 2\theta}{\left(1-\varepsilon^2 \sin^2\theta\right)} - \frac{3}{8}\frac{\varepsilon^4 \sin^2 2\theta}{\left(1-\varepsilon^2 \sin^2\theta\right)^2}\right]\times\right.$$
$$\left.\times(\cos\alpha\,\sin\nu\,\cos\psi - \sin\psi\,\sin\alpha) - \left(\cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2 \sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}\right)\cos\nu\,\cos\alpha\right\},$$

$$\tilde{A}_{z_{\varphi\varphi}} = 0,$$

$$\tilde{A}_{z_{\nu\nu}} = \frac{h\sin\alpha\cos\nu}{\pi a \sin^3\nu} + \frac{\varepsilon^2 \sin\theta\cos\theta\sin\nu\cos\psi\cos\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}} - \cos\alpha\cos\nu\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta},$$

$$\tilde{A}_{z_{\psi\psi}} = \frac{\varepsilon^2 \sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}(\cos\alpha\,\sin\nu\,\cos\psi - \sin\psi\,\sin\alpha),$$

$$\tilde{A}_{z_{\theta\nu}} = \frac{2\,\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}\left\{\sin\theta\cos\theta\sin\nu\cos\alpha - \left[\cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2 \sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}\right]\cos\nu\cos\psi\cos\alpha\right\},$$

$$\tilde{A}_{z_{\theta\psi}} = \frac{2\,\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}\left(\cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2 \sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}\right)(\sin\alpha\,\cos\psi + \cos\alpha\,\sin\psi\,\sin\nu),$$

$$\tilde{A}_{x_{\nu\psi}} = \frac{2\,\varepsilon^2 \cos\alpha\,\sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos\nu}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\theta}}. \quad (8)$$

Вектор абсолютной угловой скорости $\vec{\omega}$ эллипсоида представим как сумму векторов угловых скоростей в переносном $\vec{\omega}_e$ и относительном $\vec{\omega}_r$ движениях. Найдем представление вектора $\vec{\omega}$ через производные обобщенных координат $\dot{\varphi},\ \dot{\nu},\ \dot{\theta},\ \dot{\psi},\ \dot{\varphi}^*$ в виде разложения по осям $x^*\ y^*\ z^*$

$$\left.\begin{aligned}
\omega_{x^*} &= \dot{\varphi}\left(\sin\alpha\,\cos\psi + \cos\alpha\,\sin\psi\,\sin\nu\right) + \dot{\nu}\cos\psi + \dot{\theta},\\
\omega_{y^*} &= \dot{\varphi}\left(\cos\alpha\,\cos\nu\,\sin\theta + \cos\alpha\,\sin\nu\,\cos\theta\,\cos\psi - \sin\alpha\,\cos\theta\,\sin\psi\right) -\\
&\quad -\dot{\nu}\cos\theta\,\sin\psi + \dot{\psi}\,\sin\theta,\\
\omega_{z^*} &= \dot{\varphi}\left(\sin\alpha\,\sin\theta\,\sin\psi - \cos\alpha\,\sin\theta\,\cos\psi\,\sin\nu + \cos\alpha\,\cos\theta\,\cos\nu\right) +\\
&\quad +\dot{\nu}\sin\theta\,\sin\psi + \dot{\psi}\,\cos\theta + \dot{\varphi}^*.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Воспользуемся теоремой Бура для определения вектора углового ускорения в разложении по осям $x^*\ y^*\ z^*$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\,\tilde{\vec{\omega}}}{d\,t} = \vec{i}^*\frac{d\,\omega_{x^*}}{d\,t} + \vec{j}^*\frac{d\,\omega_{y^*}}{d\,t} + \vec{k}^*\frac{d\,\omega_{z^*}}{d\,t},$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x^*} &= \ddot{\varphi}\left(\sin\alpha\,\cos\psi + \cos\alpha\,\sin\psi\,\sin\nu\right) + \ddot{\nu}\cos\psi + \ddot{\theta} + \dot{\varphi}\,\dot{\psi}\times\\
&\times\left(\cos\alpha\,\sin\nu\,\cos\psi - \sin\alpha\,\sin\psi\right) + \dot{\varphi}\,\dot{\nu}\,\cos\alpha\,\sin\psi\,\cos\nu - \dot{\nu}\,\dot{\psi}\,\sin\psi,\\
\varepsilon_{y^*} &= \ddot{\varphi}\left(\cos\alpha\,\cos\nu\,\sin\theta + \cos\alpha\,\sin\nu\,\cos\theta\,\cos\psi - \sin\alpha\,\cos\theta\,\sin\psi\right) - \ddot{\nu}\cos\theta\times\\
&\times\sin\psi + \ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\varphi}\,\dot{\theta}\left(\cos\alpha\cos\nu\cos\theta - \cos\alpha\sin\nu\sin\theta\cos\psi + \sin\alpha\sin\theta\sin\psi\right) +\\
&+\dot{\varphi}\,\dot{\nu}\left(\cos\alpha\,\cos\theta\,\cos\nu\,\cos\psi - \cos\alpha\,\sin\nu\,\sin\theta\right) - \dot{\varphi}\,\dot{\psi}\left(\cos\alpha\,\cos\theta\,\sin\psi\,\sin\nu +\right.\\
&\left.+\sin\alpha\,\cos\theta\,\cos\psi\right) + \dot{\nu}\,\dot{\theta}\sin\theta\,\sin\psi - \dot{\nu}\,\dot{\psi}\,\cos\theta\,\cos\psi + \dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\cos\theta,\\
\varepsilon_{z^*} &= \ddot{\varphi}\left(\sin\alpha\sin\theta\sin\psi - \cos\alpha\sin\nu\sin\theta\cos\psi + \cos\alpha\cos\theta\cos\nu\right) + \ddot{\nu}\sin\theta\sin\psi +\\
&+\ddot{\psi}\cos\theta + \ddot{\varphi}^* + \dot{\varphi}\,\dot{\theta}\left(\sin\alpha\cos\theta\sin\psi - \cos\alpha\sin\nu\cos\theta\cos\psi - \cos\alpha\sin\theta\cos\nu\right) -\\
&+\dot{\varphi}\,\dot{\nu}\left(\cos\alpha\,\sin\theta\,\cos\nu\,\cos\psi + \cos\alpha\,\sin\nu\,\cos\theta\right) + \dot{\varphi}\,\dot{\psi}\left(\sin\alpha\,\sin\theta\,\cos\psi +\right.\\
&\left.+\cos\alpha\,\sin\theta\,\sin\psi\,\sin\nu\right) + \dot{\nu}\,\dot{\theta}\cos\theta\,\sin\psi + \dot{\nu}\,\dot{\psi}\,\sin\theta\,\cos\psi - \dot{\psi}\,\dot{\theta}\,\sin\theta.
\end{aligned} \tag{10}$$

Найдем скорость центра масс эллипсоида

$$\vec{V}_C = \vec{\omega}\times\vec{r}_{MC} = \vec{e}_1 V_{C_X} + \vec{e}_2 V_{C_Y} + \vec{e}_3 V_{C_Z}, \tag{11}$$

Вектор абсолютной угловой скорости эллипсоида в разложении по направлениям ортов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} = \vec{e}_1&\left(\dot{\nu} + \dot{\varphi}\sin\alpha + \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}^*\,\sin\psi\,\sin\theta\right) + \vec{e}_2\left(\dot{\varphi}\cos\alpha\,\sin\nu + \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}^*\,\cos\psi\,\sin\theta\right) +\\
&+\vec{e}_3\left(\dot{\varphi}\cos\alpha\cos\nu + \dot{\psi} + \dot{\varphi}^*\,\cos\theta\right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Подставим в уравнение (11) значения (2) и (12), получим:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{a}V_{C_X} &= \tilde{B}_{X_\varphi}\dot{\varphi} + \tilde{B}_{X_\theta}\dot{\theta} + \tilde{B}_{X_\psi}\dot{\psi} + \tilde{B}_{X_{\varphi^*}}\dot{\varphi}^*,\\
\frac{1}{a}V_{C_Y} &= \tilde{B}_{Y_\varphi}\dot{\varphi} + \tilde{B}_{Y_\theta}\dot{\theta} + \tilde{B}_{Y_\psi}\dot{\psi} + \tilde{B}_{Y_{\varphi^*}}\dot{\varphi}^*,\\
\frac{1}{a}V_{C_Z} &= \tilde{B}_{Z_\varphi}\dot{\varphi} + \tilde{B}_{Z_\theta}\dot{\theta} + \tilde{B}_{Z_\psi}\dot{\psi} + \tilde{B}_{Z_{\varphi^*}}\dot{\varphi}^*.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Коэффициенты при $\dot{\varphi},\ \dot{\theta},\ \dot{\psi},\ \dot{\varphi}^*$ вычисляются по формулам

$$\tilde{B}_{X_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\left[\cos\alpha\sin\nu\left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)+\varepsilon^2\cos\alpha\sin\theta\cos\theta\cos\psi\cos\nu\right],$$

$$\tilde{B}_{X_\theta} = \sin\psi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}, \qquad \tilde{B}_{X_{\varphi^*}} = -\frac{\left(1-\varepsilon^2\right)\sin\theta\cos\psi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}},$$

$$\tilde{B}_{X_\psi} = \frac{\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}},$$

$$\tilde{B}_{Y_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\left[\varepsilon^2\cos\alpha\sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos\nu-\sin\alpha\left(1-\varepsilon^2\sin^2\theta\right)\right],$$

$$\tilde{B}_{Y_\nu} = -\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta},$$

$$\tilde{B}_{Y_\theta} = -\cos\psi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta},$$

$$\tilde{B}_{Y_\psi} = \frac{\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}},$$

$$\tilde{B}_{Y_{\varphi^*}} = -\frac{\left(1-\varepsilon^2\right)\sin\theta\sin\psi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}$$

$$\tilde{B}_{Z_\varphi} = -\frac{\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta\left(\sin\alpha\cos\psi+\cos\alpha\sin\nu\sin\psi\right)}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}},$$

$$\tilde{B}_{Z_\nu} = -\frac{\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta\cos\psi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}},$$

$$\tilde{B}_{Z_\theta} = -\frac{\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}.$$

Выражения (4) и (13) тождественно равны. Формулы (4) приведем к ортам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и приравняем коэффициенты при одинаковых ортах, получим уравнения неголономных связей (14)

$$\left(\tilde{B}_{X_\varphi} - \cos\alpha\cos\varphi\,\tilde{A}_{X_\varphi} - \cos\alpha\sin\varphi\,\tilde{A}_{Y_\varphi} - \sin\alpha\tilde{A}_{Z_\varphi}\right)\dot{\varphi} - \left(\cos\alpha\cos\varphi\,\tilde{A}_{X_\nu} + \right.$$
$$\left. + \cos\alpha\sin\varphi\,\tilde{A}_{Y_\nu} + \sin\alpha\tilde{A}_{Z_\nu}\right)\dot{\nu} + \left(\tilde{B}_{X_\theta} - \cos\alpha\cos\varphi\,\tilde{A}_{X_\theta} + \cos\alpha\sin\varphi\,\tilde{A}_{Y_\theta} - \sin\alpha\tilde{A}_{Z_\theta}\right)\dot{\theta} +$$
$$+ \left(\tilde{B}_{X_\psi} - \cos\alpha\cos\varphi\,\tilde{A}_{X_\psi} - \cos\alpha\sin\varphi\,\tilde{A}_{Y_\psi} - \sin\alpha\,\tilde{A}_{Z_\psi}\right)\dot{\psi} + \tilde{B}_{X_{\varphi^*}}\dot{\varphi}^* = 0, \tag{15}$$

$$\left[\tilde{B}_{Z_\varphi} - \left(\sin\varphi\sin\nu - \sin\alpha\cos\varphi\cos\nu\right)\tilde{A}_{X_\varphi} + \left(\cos\varphi\sin\nu + \sin\alpha\sin\varphi\cos\nu\right)\tilde{A}_{Y_\varphi} - \right.$$
$$\left. - \cos\alpha\cos\nu\,\tilde{A}_{Z_\varphi}\right]\dot{\varphi} + \left[\tilde{B}_{Z_\nu} - \left(\sin\varphi\sin\nu - \sin\alpha\cos\varphi\cos\nu\right)\tilde{A}_{X_\nu} + \left(\cos\varphi\sin\nu + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sin\alpha\sin\varphi\cos\nu\right)\tilde{A}_{Y_\nu} - \cos\alpha\cos\nu\,\tilde{A}_{Z_\nu}\right]\dot{\nu} + \left[\tilde{B}_{Z_\theta} - \left(\sin\varphi\sin\nu - \sin\alpha\cos\varphi \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \cos\nu\right)\tilde{A}_{X_\theta} + \left(\cos\varphi\sin\nu + \sin\alpha\sin\varphi\cos\nu\right)\tilde{A}_{Y_\psi} + \cos\alpha\cos\nu\,\tilde{A}_{Z_\psi}\right]\dot{\psi} = 0. \tag{16}$$

За независимые обобщенные координаты примем углы Эйлера. Дифференцируем равенства (15) и (16) по времени. Вторые производные углов $\ddot{\varphi},\ \ddot{\nu}$ выразим через $\ddot{\theta},\ \ddot{\psi},\ \ddot{\varphi}^*$

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi} = \frac{1}{C_1 D_2 - C_2 D_1}\Big\langle &\left(C_3 D_2 - C_2 D_3\right)\ddot{\theta} + \left(C_4 D_2 - C_2 D_4\right)\ddot{\psi} + \left(C_5 D_2\right)\ddot{\varphi}^* + \\ &+\left(C_6 D_2 - C_2 D_6\right)\dot{\varphi}^2 + \left(C_7 D_2 - C_2 D_7\right)\dot{\nu}^2 + \left(C_8 D_2 - C_2 D_8\right)\dot{\theta}^2 + \\ &+\left(C_9 D_2 - C_2 D_9\right)\dot{\psi}^2 + \left(C_{10} D_2 - C_2 D_{10}\right)\dot{\varphi}\dot{\nu} + \left(C_{11} D_2 - C_2 D_{11}\right)\dot{\varphi}\dot{\theta} + \\ &+\left(C_{12} D_2 - C_2 D_{12}\right)\dot{\varphi}\dot{\psi} + \left(C_{13} D_2 - C_2 D_{13}\right)\dot{\nu}\dot{\theta} + \left(C_{14} D_2 - C_2 D_{14}\right)\dot{\nu}\dot{\psi} + \\ &+\left(C_{15} D_2 - C_2 D_{15}\right)\dot{\theta}\dot{\psi} + \left(C_{16} D_2\right)\dot{\theta}\dot{\varphi}^* + \left(C_{17} D_2\right)\dot{\psi}\dot{\varphi}^*\Big\rangle,\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\nu} = \frac{1}{C_1 D_2 - C_2 D_1}\Big\langle &\left(C_1 D_3 - C_3 D_1\right)\ddot{\theta} + \left(C_1 D_4 - C_4 D_1\right)\ddot{\psi} - \left(C_5 D_1\right)\ddot{\varphi}^* + \\ &+\left(C_1 D_6 - C_6 D_1\right)\dot{\varphi}^2 + \left(C_1 D_7 - C_7 D_1\right)\dot{\nu}^2 + \left(C_1 D_8 - C_8 D_1\right)\dot{\theta}^2 + \\ &+\left(C_1 D_9 - C_9 D_1\right)\dot{\psi}^2 + \left(C_1 D_{10} - C_{10} D_1\right)\dot{\varphi}\dot{\nu} + \left(C_1 D_{11} - C_{11} D_1\right)\dot{\varphi}\dot{\theta} + \\ &+\left(C_1 D_{12} - C_{12} D_1\right)\dot{\varphi}\dot{\psi} + \left(C_1 D_{13} - C_{13} D_1\right)\dot{\nu}\dot{\theta} + \left(C_1 D_{14} - C_{14} D_1\right)\dot{\nu}\dot{\psi} + \\ &+\left(C_1 D_{15} - C_{15} D_1\right)\dot{\theta}\dot{\psi} - \left(C_{16} D_1\right)\dot{\theta}\dot{\varphi}^* - \left(C_{17} D_1\right)\dot{\psi}\dot{\varphi}^*\Big\rangle.\end{aligned} \tag{18}$$

Коэффициенты $C_i,\ D_j$ в (17) и (18) определяются по формулам

$$C_1 = -\cos\alpha\cos\varphi\,\tilde{A}_{x_\varphi} - \cos\alpha\sin\varphi\,\tilde{A}_{y_\varphi} - \sin\alpha\,\tilde{A}_{z_\varphi} + \tilde{B}_{X_\varphi},$$

$$C_2 = -\left(\cos\alpha\cos\varphi\,\tilde{A}_{x_\nu} + \cos\alpha\sin\varphi\,\tilde{A}_{y_\nu} + \sin\alpha\,\tilde{A}_{z_\nu}\right),$$

$$C_3 = \cos\alpha\cos\varphi\,\tilde{A}_{x_\theta} + \cos\alpha\sin\varphi\,\tilde{A}_{y_\theta} + \sin\alpha\,\tilde{A}_{z_\theta} - \tilde{B}_{X_\theta},$$

$$C_4 = \cos\alpha\cos\varphi\,\tilde{A}_{x_\psi} + \cos\alpha\sin\varphi\,\tilde{A}_{y_\psi} + \sin\alpha\,\tilde{A}_{z_\psi} - \tilde{B}_{X_\theta},$$

$$C_5 = -\tilde{B}_{X_{\varphi^*}},$$

$$C_6 = \sin\alpha\,\tilde{A}_{z_{\varphi\varphi}} + \cos\alpha\cos\varphi\left(\tilde{A}_{x_{\varphi\varphi}} + \tilde{A}_{y_\varphi}\right) + \cos\alpha\sin\varphi\left(\tilde{A}_{y_{\varphi\varphi}} - \tilde{A}_{x_\varphi}\right),$$

$$C_7 = \cos\alpha\cos\varphi\,\tilde{A}_{x_{\nu\nu}} + \cos\alpha\sin\varphi\,\tilde{A}_{y_{\nu\nu}} + \sin\alpha\,\tilde{A}_{z_{\nu\nu}},$$

$$C_8 = \cos\alpha\cos\varphi\,\tilde{A}_{x_{\theta\theta}} + \cos\alpha\sin\varphi\,\tilde{A}_{y_{\theta\theta}} + \sin\alpha\,\tilde{A}_{z_{\theta\theta}} - \tilde{B}_{X_{\theta\theta}},$$

$$C_9 = \cos\alpha\cos\varphi\,\tilde{A}_{x_{\psi\psi}} + \cos\alpha\sin\varphi\,\tilde{A}_{y_{\psi\psi}} + \sin\alpha\,\tilde{A}_{z_{\psi\psi}} - \tilde{B}_{X_{\psi\psi}},$$

$$C_{10} = \cos\alpha\cos\varphi\left(\tilde{A}_{y_\nu} - \tilde{A}_{x_{\nu\varphi}} + \tilde{A}_{x_{\varphi\nu}}\right) + \cos\alpha\sin\varphi\left(\tilde{A}_{x_\nu} + \tilde{A}_{y_{\nu\varphi}} + \tilde{A}_{y_{\varphi\nu}}\right) + \left(\tilde{A}_{z_{\varphi\nu}} + \tilde{A}_{z_{\nu\varphi}}\right) - \tilde{B}_{X_{\varphi\nu}},$$

$$C_{11} = \cos\alpha\cos\varphi\left(\tilde{A}_{y_\theta} + \tilde{A}_{x_{\varphi\theta}} + \tilde{A}_{x_{\theta\varphi}}\right) + \cos\alpha\sin\varphi\left(-\tilde{A}_{x_\theta} + \tilde{A}_{y_{\varphi\theta}} + \tilde{A}_{y_{\theta\varphi}}\right) +$$

$$+\sin\alpha\left(\tilde{A}_{z_{\varphi\theta}}+\tilde{A}_{z_{\theta\varphi}}\right)-\tilde{B}_{X_{\varphi\theta}},$$

$$C_{12}=\cos\alpha\cos\varphi\left(\tilde{A}_{y_{\psi}}+\tilde{A}_{x_{\varphi\psi}}+\tilde{A}_{x_{\psi\varphi}}\right)+\cos\alpha\sin\varphi\left(-\tilde{A}_{x_{\psi}}+\tilde{A}_{y_{\varphi\psi}}+\tilde{A}_{y_{\psi\varphi}}\right)+$$

$$+\sin\alpha\left(\tilde{A}_{z_{\varphi\psi}}+\tilde{A}_{z_{\psi\varphi}}\right)-\tilde{B}_{X_{\varphi\psi}},$$

$$C_{13}=\cos\alpha\cos\varphi\left(\tilde{A}_{x_{\nu\theta}}+\tilde{A}_{x_{\theta\nu}}\right)+\cos\alpha\sin\varphi\left(\tilde{A}_{y_{\nu\theta}}+\tilde{A}_{y_{\theta\nu}}\right)+\sin\alpha\left(\tilde{A}_{z_{\nu\theta}}+\tilde{A}_{z_{\theta\nu}}\right),$$

$$C_{14}=\cos\alpha\cos\varphi\left(\tilde{A}_{x_{\nu\psi}}+\tilde{A}_{x_{\psi\nu}}\right)+\cos\alpha\sin\varphi\left(\tilde{A}_{y_{\nu\psi}}+\tilde{A}_{y_{\psi\nu}}\right)+\sin\alpha\left(\tilde{A}_{z_{\nu\psi}}+\tilde{A}_{z_{\psi\nu}}\right),$$

$$C_{15}=\cos\alpha\cos\varphi\left(\tilde{A}_{x_{\theta\psi}}+\tilde{A}_{x_{\psi\theta}}\right)+\cos\alpha\sin\varphi\left(\tilde{A}_{y_{\theta\psi}}+\tilde{A}_{y_{\psi\theta}}\right)+\sin\alpha\left(\tilde{A}_{z_{\theta\psi}}+\tilde{A}_{z_{\psi\theta}}\right),$$

$$C_{16}=-\tilde{B}_{X_{\varphi^*\theta}},$$

$$C_{17}=-\tilde{B}_{X_{\varphi^*\psi}};$$

$$D_1=\tilde{B}_{Z_{\varphi}}-(\sin\varphi\sin\nu-\cos\alpha\cos\varphi\cos\nu)\tilde{A}_{x_{\varphi}}+(\cos\varphi\sin\nu+$$

$$+\sin\alpha\sin\varphi\cos\nu)\tilde{A}_{y_{\varphi}}-\cos\alpha\sin\nu\,\tilde{A}_{z_{\varphi}},$$

$$D_2=\tilde{B}_{Z_{\nu}}-(\sin\varphi\sin\nu-\sin\alpha\cos\varphi\cos\nu)\tilde{A}_{x_{\nu}}+(\cos\varphi\sin\nu+$$

$$+\sin\alpha\sin\varphi\cos\nu)\tilde{A}_{y_{\nu}}-\cos\alpha\sin\nu\,\tilde{A}_{z_{\nu}},$$

$$D_3=(\sin\varphi\sin\nu-\sin\alpha\cos\varphi\cos\nu)\tilde{A}_{x_{\theta}}-(\cos\varphi\sin\nu+\sin\alpha\sin\varphi\cos\nu)\tilde{A}_{y_{\theta}}+\cos\alpha\sin\nu\,\tilde{A}_{z_{\theta}},$$

$$D_4=(\sin\varphi\sin\nu-\sin\alpha\cos\varphi\cos\nu)\tilde{A}_{x_{\psi}}-(\cos\varphi\sin\nu+\sin\alpha\sin\varphi\cos\nu)\tilde{A}_{y_{\psi}}+$$

$$+\cos\alpha\sin\nu\,\tilde{A}_{z_{\psi}}-\tilde{B}_{Z_{\psi}},$$

$$D_5=0,$$

$$D_6=(\cos\varphi\sin\nu+\sin\alpha\sin\varphi\cos\nu)\tilde{A}_{x_{\varphi}}+(\sin\varphi\sin\nu-\sin\alpha\cos\varphi\cos\nu)\tilde{A}_{y_{\varphi}}+(\sin\varphi\sin\nu-$$

$$-\sin\alpha\cos\varphi\cos\nu)\,\tilde{A}_{x_{\varphi\varphi}}-(\cos\varphi\sin\nu+\sin\alpha\sin\varphi\cos\nu)\,\tilde{A}_{y_{\varphi\varphi}}+\cos\alpha\cos\nu\,\tilde{A}_{z_{\varphi\varphi}},$$

$$D_7=(\sin\varphi\cos\nu+\sin\alpha\cos\varphi\sin\nu)\tilde{A}_{x_{\nu}}+(\cos\varphi\cos\nu-\sin\alpha\sin\varphi\sin\nu)\tilde{A}_{y_{\nu}}-$$

$$-\cos\alpha\sin\nu\,\tilde{A}_{z_{\nu}}+(\sin\varphi\sin\nu-\sin\alpha\cos\varphi\cos\nu)\,\tilde{A}_{x_{\nu\nu}}-$$

$$-(\cos\varphi\sin\nu+\sin\alpha\sin\varphi\cos\nu)\,\tilde{A}_{y_{\nu\nu}}+\cos\alpha\cos\nu\,\tilde{A}_{z_{\nu\nu}},$$

$$D_8=-\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\left(\cos 2\theta+\frac{\varepsilon^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\right)+(\sin\varphi\sin\nu-$$

$$-\sin\alpha\cos\varphi\cos\nu)\,\tilde{A}_{x_{\theta\theta}}-(\cos\varphi\sin\nu+\sin\alpha\sin\varphi\sin\nu)\,\tilde{A}_{y_{\theta\theta}}+\tilde{A}_{z_{\theta\theta}}\cos\nu,$$

$$D_9 = (\sin\varphi\,\sin\nu - \sin\alpha\,\cos\varphi\,\cos\nu)\,\tilde{A}_{x_{\psi\psi}} - (\cos\varphi\,\sin\nu +$$

$$+\sin\alpha\,\sin\varphi\,\cos\nu)\,\tilde{A}_{y_{\psi\psi}} + \cos\alpha\,\cos\nu\,\tilde{A}_{z_{\psi\psi}},$$

$$D_{10} = -\frac{\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta\,\sin\psi\,\cos\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}} + (\cos\varphi\,\sin\nu + \sin\alpha\,\sin\varphi\,\cos\nu)\,\tilde{A}_{x_\nu} +$$

$$+(\sin\varphi\,\cos\nu + \sin\alpha\,\cos\varphi\,\sin\nu)\tilde{A}_{x_\varphi} + (\sin\varphi\,\sin\nu - \sin\alpha\,\cos\varphi\,\cos\nu)\tilde{A}_{y_\nu} +$$

$$+(\cos\varphi\,\cos\nu - \sin\alpha\,\sin\varphi\,\sin\nu)\tilde{A}_{y_\varphi} - \cos\alpha\,\sin\nu\,\tilde{A}_{z_\varphi} + (\sin\varphi\,\sin\nu - \sin\alpha\,\cos\varphi\,\cos\nu)\,\tilde{A}_{x_{\varphi\nu}} -$$

$$-(\cos\varphi\,\sin\nu + \sin\alpha\,\sin\varphi\,\cos\nu)\left(\tilde{A}_{y_{\varphi\nu}} + \tilde{A}_{y_{\nu\varphi}}\right) + \cos\alpha\,\cos\nu\left(\tilde{A}_{Z_{\varphi\nu}} + \tilde{A}_{Z_{\nu\varphi}}\right),$$

$$D_{11} = -\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\left(\cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\right)(\sin\alpha\,\cos\psi + \cos\alpha\,\sin\psi\,\sin\nu) +$$

$$+(\cos\varphi\,\sin\nu + \sin\alpha\,\sin\varphi\,\cos\nu)\tilde{A}_{x_\theta} + (\sin\varphi\,\sin\nu - \sin\alpha\,\cos\varphi\,\cos\nu)\,\tilde{A}_{y_\theta} -$$

$$-(\cos\varphi\,\sin\nu + \sin\alpha\,\sin\varphi\,\cos\nu)\left(\tilde{A}_{y_{\varphi\theta}} + \tilde{A}_{y_{\theta\varphi}}\right) + \cos\varphi\,\cos\nu\left(\tilde{A}_{z_{\varphi\theta}} + \tilde{A}_{z_{\theta\varphi}}\right),$$

$$D_{12} = -\frac{\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}(\sin\alpha\,\sin\psi - \cos\alpha\,\cos\psi\,\sin\nu) + (\cos\varphi\,\sin\nu + \sin\alpha\,\sin\varphi\,\cos\nu)\tilde{A}_{x_\psi} +$$

$$+(\sin\varphi\,\sin\nu - \sin\alpha\,\cos\varphi\,\cos\nu)\,\tilde{A}_{y_\psi} + (\sin\varphi\,\sin\nu - \sin\alpha\,\cos\varphi\,\cos\nu)\left(\tilde{A}_{x_{\varphi\psi}} + \tilde{A}_{x_{\psi\varphi}}\right) -$$

$$-(\cos\varphi\,\sin\nu + \sin\alpha\,\sin\varphi\,\cos\nu)\times\left(\tilde{A}_{y_{\varphi\psi}} + \tilde{A}_{y_{\psi\varphi}}\right) + \cos\alpha\,\cos\nu\left(\tilde{A}_{z_{\varphi\psi}} + \tilde{A}_{z_{\psi\varphi}}\right),$$

$$D_{13} = \frac{\varepsilon^2\cos\psi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\left(\cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}\right) + (\sin\varphi\,\cos\nu + \sin\alpha\,\cos\varphi\,\sin\nu)\tilde{A}_{x_\theta} +$$

$$+(\cos\varphi\cos\nu - \sin\alpha\sin\varphi\sin\nu)\tilde{A}_{y_\theta} - \cos\alpha\sin\nu\,\tilde{A}_{z_\theta} + (\sin\varphi\sin\nu - \sin\alpha\cos\varphi\cos\nu)\left(\tilde{A}_{x_{\nu\theta}} +\right.$$

$$\left.+\tilde{A}_{x_{\theta\nu}}\right) - (\cos\varphi\,\sin\nu + \sin\alpha\,\sin\varphi\,\cos\nu)\times\left(\tilde{A}_{y_{\nu\theta}} + \tilde{A}_{y_{\theta\nu}}\right) + \cos\alpha\,\cos\nu\left(\tilde{A}_{z_{\nu\theta}} + \tilde{A}_{z_{\theta\nu}}\right),$$

$$D_{14} = -\frac{\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}} + (\cos\varphi\,\cos\nu - \sin\alpha\,\sin\varphi\,\sin\nu)\tilde{A}_{x_\psi} + (\sin\varphi\,\cos\nu -$$

$$-\sin\alpha\,\cos\varphi\,\sin\nu)\tilde{A}_{y_\psi} - \cos\alpha\,\sin\nu\,\tilde{A}_{z_\psi} + (\sin\varphi\,\sin\nu - \sin\alpha\,\cos\varphi\,\cos\nu)\left(\tilde{A}_{x_{\nu\psi}} + \tilde{A}_{x_{\psi\nu}}\right) -$$

$$-(\cos\varphi\,\sin\nu + \sin\alpha\,\sin\varphi\,\cos\nu)\left(\tilde{A}_{y_{\nu\psi}} + \tilde{A}_{y_{\psi\nu}}\right) + \cos\alpha\,\cos\nu\left(\tilde{A}_{z_{\nu\psi}} + \tilde{A}_{z_{\psi\nu}}\right),$$

$$D_{15} = (\sin\varphi\,\sin\nu - \sin\alpha\,\cos\varphi\,\cos\nu)\left(\tilde{A}_{x_{\theta\psi}} + \tilde{A}_{x_{\psi\theta}}\right) - (\cos\varphi\,\sin\nu +$$

$$+\sin\alpha\,\sin\varphi\,\cos\nu\Big)\left(\tilde{A}_{y_{\theta\psi}}+\tilde{A}_{y_{\psi\theta}}\right)+\cos\alpha\,\cos\nu\left(\tilde{A}_{z_{\theta\psi}}+\tilde{A}_{z_{\psi\theta}}\right). \qquad (19)$$

В уравнениях (7) и (10) заменим $\ddot{\varphi},\ \ddot{\nu}$ согласно формулам (17) – (19). Коэффициенты $\tilde{B}_{X_{\theta\theta}},\ \tilde{B}_{X_{\psi\psi}},\ \tilde{B}_{X_{\varphi\nu}},\ \tilde{B}_{X_{\varphi\theta}},\ \tilde{B}_{X_{\varphi\psi}},\ \tilde{B}_{X_{\varphi^*\theta}},\ \tilde{B}_{X_{\varphi^*\psi}}$ при $\dot{\theta}^2,\ \dot{\psi}^2,\ \dot{\varphi}\dot{\nu},\ \dot{\varphi}\dot{\theta},\ \dot{\varphi}\dot{\psi},\ \dot{\varphi}^*\dot{\theta},\ \dot{\varphi}^*\dot{\psi}$ определим, дифференцируя по времени выражения $\dot{\varphi}\,\tilde{\dot{B}}_{X_\varphi},\ \dot{\theta}\,\tilde{\dot{B}}_{X_\theta},\ \dot{\psi}\,\tilde{\dot{B}}_{X_\psi},\ \dot{\varphi}^*\,\tilde{\dot{B}}_{X_{\varphi^*}}$,

Ускорение центра масс эллипсоида в проекциях на оси x, y, z

$$a_{x_C}=a\tilde{a}_{x_C}=a\Big(f_{x_1}\ddot{\theta}+f_{x_2}\ddot{\psi}+f_{x_3}\ddot{\varphi}^*+f_{x_4}\dot{\theta}^2+f_{x_5}\dot{\varphi}^2+f_{x_6}\dot{\nu}^2+f_{x_7}\dot{\psi}^2+$$
$$+f_{x_8}\dot{\varphi}\dot{\theta}+f_{x_9}\dot{\nu}\dot{\theta}+f_{x_{10}}\dot{\theta}\dot{\psi}+f_{x_{11}}\dot{\varphi}\dot{\nu}+f_{x_{12}}\dot{\varphi}\dot{\psi}+f_{x_{13}}\dot{\nu}\dot{\psi}+f_{x_{14}}\dot{\theta}\dot{\varphi}^*+f_{x_{15}}\dot{\psi}\dot{\varphi}^*\Big),$$
$$a_{y_C}=a\tilde{a}_{y_C}=a\Big(f_{y_1}\ddot{\theta}+f_{y_2}\ddot{\psi}+f_{y_3}\ddot{\varphi}^*+f_{y_4}\dot{\theta}^2+f_{y_5}\dot{\varphi}^2+f_{y_6}\dot{\nu}^2+f_{y_7}\dot{\psi}^2+$$
$$+f_{y_8}\dot{\varphi}\dot{\theta}+f_{y_9}\dot{\nu}\dot{\theta}+f_{y_{10}}\dot{\theta}\dot{\psi}+f_{y_{11}}\dot{\varphi}\dot{\nu}+f_{y_{12}}\dot{\varphi}\dot{\psi}+f_{y_{13}}\dot{\nu}\dot{\psi}+f_{y_{14}}\dot{\theta}\dot{\varphi}^*+f_{y_{15}}\dot{\psi}\dot{\varphi}^*\Big),$$
$$a_{z_C}=a\tilde{a}_{z_C}=a\Big(f_{z_1}\ddot{\theta}+f_{z_2}\ddot{\psi}+f_{z_3}\ddot{\varphi}^*+f_{z_4}\dot{\theta}^2+f_{z_5}\dot{\varphi}^2+f_{z_6}\dot{\nu}^2+f_{z_7}\dot{\psi}^2+$$
$$+f_{z_8}\dot{\varphi}\dot{\theta}+f_{z_9}\dot{\nu}\dot{\theta}+f_{z_{10}}\dot{\theta}\dot{\psi}+f_{z_{11}}\dot{\varphi}\dot{\nu}+f_{z_{12}}\dot{\varphi}\dot{\psi}+f_{z_{13}}\dot{\nu}\dot{\psi}+f_{z_{14}}\dot{\theta}\dot{\varphi}^*+f_{z_{15}}\dot{\psi}\dot{\varphi}^*\Big). \qquad (20)$$

Угловое ускорение в разложении по главным осям инерции эллипсоида

$$\varepsilon_{x^*}=\varepsilon_{x_1}\ddot{\theta}+\varepsilon_{x_2}\ddot{\psi}+\varepsilon_{x_3}\ddot{\varphi}^*+\varepsilon_{x_4}\dot{\varphi}\dot{\psi}+\varepsilon_{x_5}\dot{\varphi}\dot{\nu}+\varepsilon_{x_6}\dot{\nu}\dot{\psi}+\varepsilon_{x_7}\dot{\varphi}^2+\varepsilon_{x_8}\dot{\nu}^2+$$
$$+\varepsilon_{x_9}\dot{\theta}^2+\varepsilon_{x_{10}}\dot{\psi}^2+\varepsilon_{x_{11}}\dot{\varphi}\dot{\theta}+\varepsilon_{x_{12}}\dot{\nu}\dot{\theta}+\varepsilon_{x_{13}}\dot{\theta}\dot{\psi}+\varepsilon_{x_{14}}\dot{\theta}\dot{\varphi}^*+\varepsilon_{x_{15}}\dot{\psi}\dot{\varphi}^*,$$
$$\varepsilon_{y^*}=\varepsilon_{y_1}\ddot{\theta}+\varepsilon_{y_2}\ddot{\psi}+\varepsilon_{y_3}\ddot{\varphi}^*+\varepsilon_{y_4}\dot{\varphi}\dot{\psi}+\varepsilon_{y_5}\dot{\varphi}\dot{\nu}+\varepsilon_{y_6}\dot{\nu}\dot{\psi}+\varepsilon_{y_7}\dot{\varphi}^2+\varepsilon_{y_8}\dot{\nu}^2+$$
$$+\varepsilon_{y_9}\dot{\theta}^2+\varepsilon_{y_{10}}\dot{\psi}^2+\varepsilon_{y_{11}}\dot{\varphi}\dot{\theta}+\varepsilon_{y_{12}}\dot{\nu}\dot{\theta}+\varepsilon_{y_{13}}\dot{\theta}\dot{\psi}+\varepsilon_{y_{14}}\dot{\theta}\dot{\varphi}^*+\varepsilon_{y_{15}}\dot{\psi}\dot{\varphi}^*,$$
$$\varepsilon_{z^*}=\varepsilon_{z_1}\ddot{\theta}+\varepsilon_{z_2}\ddot{\psi}+\varepsilon_{z_3}\ddot{\varphi}^*+\varepsilon_{z_4}\dot{\varphi}\dot{\psi}+\varepsilon_{z_5}\dot{\varphi}\dot{\nu}+\varepsilon_{z_6}\dot{\nu}\dot{\psi}+\varepsilon_{z_7}\dot{\varphi}^2+\varepsilon_{z_8}\dot{\nu}^2+$$
$$+\varepsilon_{z_9}\dot{\theta}^2+\varepsilon_{z_{10}}\dot{\psi}^2+\varepsilon_{z_{11}}\dot{\varphi}\dot{\theta}+\varepsilon_{z_{12}}\dot{\nu}\dot{\theta}+\varepsilon_{z_{13}}\dot{\theta}\dot{\psi}+\varepsilon_{z_{14}}\dot{\theta}\dot{\varphi}^*+\varepsilon_{z_{15}}\dot{\psi}\dot{\varphi}^*. \qquad (21)$$

Коэффициенты $f_{x_i},\ f_{y_i},\ f_{z_i},\ \varepsilon_{x_j},\ \varepsilon_{y_j},\ \varepsilon_{z_j}$ являются функциями обобщенных координат и определяются после замены в уравнениях (7) и (10) по формулам (17) и (18).

Сумма поступательной $\Pi_{пост}$ и вращательной $\Pi_{вр}$ энергии представляет энергию ускорений Π

$$\Pi_{пост}=\tfrac{1}{2}\left(m a_{x_C}^{\ 2}+m a_{y_C}^{\ 2}+m a_{z_C}^{\ 2}\right), \qquad (22)$$

$$\Pi_{вр}=\tfrac{1}{2}\left(J_{x^*}\varepsilon_{x^*}^2+J_{y^*}\varepsilon_{y^*}^2+J_{z^*}\varepsilon_{z^*}^2\right)+\left(J_{z^*}-J_{x^*}\right)\varepsilon_{x^*}\omega_{z^*}\omega_{y^*}+$$

$$\left(J_{x^*}-J_{z^*}\right)\varepsilon_{y^*}\omega_{x^*}\omega_{z^*}+\left(J_{y^*}-J_{x^*}\right)\varepsilon_{z^*}\omega_{y^*}\omega_{x^*}+\Pi^*_{вр}, \tag{23}$$

где $\Pi^*_{вр}$ – часть энергии ускорений не зависящая от угловых ускорений.

Для эллипсоида вращения с большой осью $2a$ и эксцентриситетом ε главные центральные моменты инерции определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} &J_{x^*}=J_{y^*}=\tfrac{2}{5}ma^2\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right),\\ &J_{z^*}=\tfrac{2}{5}ma^2\left(1-\varepsilon^2\right),\\ &J_{x^*}-J_{z^*}=\frac{ma^2\varepsilon^2}{5}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Подставим значения (24) в равенство (23)

$$\Pi_{вр}=\frac{ma^2}{5}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\left(\varepsilon^2_{x^*}+\varepsilon^2_{y^*}\right)+\frac{ma^2}{5}\left(1-\varepsilon^2\right)\varepsilon^2_{z^*}+\frac{ma^2\varepsilon^2}{5}\omega^2_{z^*}\times$$
$$\times\left(\varepsilon_{y^*}\omega_{x^*}-\varepsilon_{x^*}\omega_{y^*}\right)+\Pi^*_{вр}. \tag{25}$$

Составим уравнения Аппеля

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\left(\Pi_{пост}+\Pi_{вр}\right)}{\partial\ddot{\theta}}=Q_\theta;\\ &\frac{\partial\left(\Pi_{пост}+\Pi_{вр}\right)}{\partial\ddot{\psi}}=Q_\psi;\\ &\frac{\partial\left(\Pi_{пост}+\Pi_{вр}\right)}{\partial\ddot{\varphi}^*}=Q_{\varphi^*}; \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} &ma^2\left(f_{x_1}\tilde{a}_{x_C}+f_{y_1}\tilde{a}_{y_C}+f_{z_1}\tilde{a}_{z_C}\right)+\tfrac{2}{5}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\left(\varepsilon_{x_1}\varepsilon_{x^*}+\varepsilon_{y_1}\varepsilon_{y^*}\right)+\\ &+\tfrac{2}{5}\left(1-\varepsilon^2\right)\varepsilon_{z_1}\varepsilon_{z^*}+\tfrac{\varepsilon^2}{5}\omega_{z^*}\left(\varepsilon_{y_1}\omega_{x^*}-\varepsilon_{x_1}\omega_{y^*}\right)\Big\}=Q_\theta;\\ &ma^2\left(f_{x_2}\tilde{a}_{x_C}+f_{y_2}\tilde{a}_{y_C}+f_{z_2}\tilde{a}_{z_C}\right)+\tfrac{2}{5}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\left(\varepsilon_{x_2}\varepsilon_{x^*}+\varepsilon_{y_2}\varepsilon_{y^*}\right)+\\ &+\tfrac{2}{5}\left(1-\varepsilon^2\right)\varepsilon_{z_2}\varepsilon_{z^*}+\tfrac{\varepsilon^2}{5}\omega_{z^*}\left(\varepsilon_{y_2}\omega_{x^*}-\varepsilon_{x_2}\omega_{y^*}\right)\Big\}=Q_\psi;\\ &ma^2\left(f_{x_3}\tilde{a}_{x_C}+f_{y_3}\tilde{a}_{y_C}+f_{z_3}\tilde{a}_{z_C}\right)+\tfrac{2}{5}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\left(\varepsilon_{x_3}\varepsilon_{x^*}+\varepsilon_{y_3}\varepsilon_{y^*}\right)+\\ &+\tfrac{2}{5}\left(1-\varepsilon^2\right)\varepsilon_{z_3}\varepsilon_{z^*}+\tfrac{\varepsilon^2}{5}\omega_{z^*}\left(\varepsilon_{y_3}\omega_{x^*}-\varepsilon_{x_3}\omega_{y^*}\right)\Big\}=Q_{\varphi^*}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Коэффициенты $f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}, f_{y_1}, f_{y_2}, f_{y_3}, f_{z_1}, f_{z_2}, f_{z_3}$, ускорения a_{x_C}, a_{y_C}, a_{z_C} определяются из уравнений (20), угловые скорости ω_{x^*}, ω_{y^*}, ω_{z^*} формулами (9), коэффициенты $\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{x_2}, \varepsilon_{x_3}, \varepsilon_{y_1}, \varepsilon_{y_2}, \varepsilon_{y_3}, \varepsilon_{z_1}, \varepsilon_{z_2}, \varepsilon_{z_3}$ и угловые ускорения ε_{x^*}, ε_{y^*}, ε_{z^*} по формулам (21)

Определим обобщенные силы. В уравнениях (4) заменим $\dot{\varphi}, \dot{\nu}$ через $\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}^*$ по формулам (17), (18), найдем составляющие вектора скорости центра масс эллипсоида по осям X, Y, Z и введем квазикоординаты

$$\left.\begin{aligned} V_{C_X} &= a\left(d_{X_\theta}\dot{\theta} + d_{X_\psi}\dot{\psi} + d_{X_{\varphi^*}}\dot{\varphi}^*\right) = a\dot{\pi}_1, \\ V_{C_Y} &= a\left(d_{Y_\theta}\dot{\theta} + d_{Y_\psi}\dot{\psi} + d_{Y_{\varphi^*}}\dot{\varphi}^*\right) = a\dot{\pi}_2, \\ V_{C_Z} &= a\left(d_{Z_\theta}\dot{\theta} + d_{Z_\psi}\dot{\psi} + d_{Z_{\varphi^*}}\dot{\varphi}^*\right) = a\dot{\pi}_3, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

где коэффициенты при $\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}^*$ известные функции координат.

Уравнения Апреля могут быть записаны в квазикоординатах [12]

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \ddot{\pi}_1} = Q_{\pi_1}, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \ddot{\pi}_2} = Q_{\pi_2}, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \ddot{\pi}_3} = Q_{\pi_3}. \tag{29}$$

Определим обобщенные силы соответствующие квазикоординатам.

Из выражений (28) следует

$$\delta S_{C_X} = a\delta\pi_1, \qquad \delta S_{C_Y} = a\delta\pi_2, \qquad \delta S_{C_Z} = a\delta\pi_3. \tag{30}$$

Работа силы тяжести на возможных перемещениях системы

$$\delta A = -(mg\,\sin\alpha)\,\delta S_{C_x} - (mg\,\cos\alpha\sin\nu)\,\delta S_{C_y} - (mg\,\cos\alpha\cos\nu)\,\delta S_{C_z} =$$
$$= -(mga\,\sin\alpha)\,\delta\pi_1 - (mga\,\cos\alpha\,\sin\nu)\,\delta\pi_2 - (mga\,\cos\alpha\,\cos\nu)\,\delta\pi_3. \tag{31}$$

Учитывая, что коэффициенты при вариациях обобщенных координат являются обобщенными силами, получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \ddot{\pi}_1} = -mga\,\sin\alpha, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \ddot{\pi}_2} = -mga\,\cos\alpha\,\sin\nu, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \ddot{\pi}_3} = -mga\,\cos\alpha\,\cos\nu. \tag{32}$$

Дифференцируем по времени уравнения (28)

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\pi}_1 &= d_{X_\theta}\ddot{\theta} + d_{X_\psi}\ddot{\psi} + d_{X_{\varphi^*}}\ddot{\varphi}^* + f_1\left(\theta, \varphi, \psi, \nu, \varphi^*, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}^*\right), \\ \ddot{\pi}_2 &= d_{Y_\theta}\ddot{\theta} + d_{Y_\psi}\ddot{\psi} + d_{Y_{\varphi^*}}\ddot{\varphi}^* + f_2\left(\theta, \varphi, \psi, \nu, \varphi^*, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}^*\right), \\ \ddot{\pi}_3 &= d_{Z_\theta}\ddot{\theta} + d_{Z_\psi}\ddot{\psi} + d_{Z_{\varphi^*}}\ddot{\varphi}^* + f_3\left(\theta, \varphi, \psi, \nu, \varphi^*, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}^*\right). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Полагаем $\Pi = ma^2\tilde{\Pi}$ и с учетом значений (32), (33), получим систему уравнений Аппеля

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\ddot{\theta}} &= -\frac{q}{a}\left(d_{X_\theta}\sin\alpha + d_{Y_\theta}\cos\alpha\sin\nu + d_{Z_\theta}\cos\alpha\cos\nu\right),\\
\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\ddot{\psi}} &= -\frac{q}{a}\left(d_{X_\psi}\sin\alpha + d_{Y_\psi}\cos\alpha\sin\nu + d_{Z_\psi}\cos\alpha\cos\nu\right),\\
\frac{\partial\tilde{\Pi}}{\partial\ddot{\varphi}^*} &= -\frac{q}{a}\left(d_{X_{\varphi^*}}\sin\alpha + d_{Y_{\varphi^*}}\cos\alpha\sin\nu + d_{Z_{\varphi^*}}\cos\alpha\cos\nu\right).
\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Уравнения Аппеля (34) совместно с уравнениями неголономных связей (15), (16) описывают движение эллипсоида по абсолютно шероховатой винтовой поверхности под действием силы тяжести. Решение системы определяется для заданных начальных условий. Задаваясь расстоянием r_0 точки контакта от оси геликоида, полагаем $\varphi_0 = 0$, $\nu_0 = arctg\left(\frac{h\cos\alpha}{2\pi r_0}\right)$, $\psi = \psi_0$, $\theta = \theta_0$, $\varphi_o^* = 0$. Задаемся угловыми скоростями $\dot{\varphi}_o^*, \dot{\psi}_0, \dot{\theta}_0$. Из уравнений неголономных связей (15), (16) определяем $\dot{\varphi}_0$, $\dot{\nu}_0$.

Введем ограничения:

1. При качении эллипсоида по винтовой поверхности должен сохраняться одноточечный контакт. Для этого минимальная кривизна нормального сечения эллипсоида $K_{1_{min}}$ должна быть больше максимальной кривизны поверхности геликоида $K_{2_{max}}$

$$\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{a} > \frac{1}{2\left(EG - F^2\right)}\left[-\left(2MF - EN - LG\right) + \sqrt{D}\right], \quad (35)$$

где $D = \left(2MF - EN - LG\right)^2 - 4\left(EG - F^2\right)\left(LN - M^2\right)$; $E,\ F,\ G,\ L,\ M,\ N$ – элементы первой и второй квадратичных форм Гаусса для геликоида.

2. Ось винтовой поверхности не должна пересекать поверхность эллипсоида

$$tg\,\nu < \frac{h}{2\pi l}, \quad (36)$$

где l – расстояние между точкой контакта M и точкой пересечения образующей геликоида с осью, при ее соприкосновении с эллипсоидом.

Выводы

1. Получена система уравнений второго порядка линейная относительно вторых производных независимых координат $\psi,\ \theta,\ \varphi^*$ и представляющая квадратичную форму из производных $\dot{\varphi},\ \dot{\nu},\ \dot{\psi},\ \dot{\theta},\ \dot{\varphi}^*$. Система уравнений второго порядка рассматривается совместно с уравнениями неголономных связей, представляющих линейные функции производных обобщенных координат $\dot{\varphi},\ \dot{\nu},\ \dot{\psi},\ \dot{\theta},\ \dot{\varphi}^*$.

2. Коэффициенты при производных являются функциями координат и ввиду сложности полученных выражений вычисляются последовательно.

3. Для отыскания обобщенных сил, целесообразно использовать уравнения Апреля в квазикоординатах, а затем линейную связь между производными $\dot{\psi},\ \dot{\theta},\ \dot{\varphi}^*$ и $\dot{\pi}_1,\ \dot{\pi}_2,\ \dot{\pi}_3$.

4. Начальные условия задаются для $\varphi_0 = 0,\ \nu_0,\ \psi_0,\ \theta_0,\ \varphi_0^* = 0,\ \dot{\psi},\ \dot{\theta},\ \dot{\varphi}_0^*$, а значения $\dot{\varphi}_0$, $\dot{\nu}_0$ определяются из уравнений неголономных связей.

5. Параметры $\varphi,\ \nu,\ \psi,\ \theta,\ \varphi^*,\ \dot{\varphi},\ \dot{\nu},\ \dot{\psi},\ \dot{\theta},\ \dot{\varphi}^*$ целесообразно определять в интервале $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi.$, затем продолжить расчет.

6. Систему уравнений второго порядка можно использовать и для других силовых систем, изменив при этом соответствующим образом обобщенные силы.

Список литературы:

1. Чаплыгин С.А. Исследования по динамике неголономных систем / С.А. Чаплыгин. – М.: УРСС, 2007. – 112 с.
2. Добронравов В.В. Основы механики неголономных систем / В.В. Добронравов. – М.: Высшая школа, 1970. – 272 с.
3. Неймарк Ю.И. Динамика неголономных систем / Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука, 1967. – 520 с.
4. Аппель П. Теоретическая механика / П. Аппель. – М.: Физматгиз, 1960. – Т. 2. – 487 с.
5. Воронец П.В. К задаче о движении твердого тела, катящегося без скольжения по данной поверхности под действием данных сил / П.В. Воронец // Киевские университетск. известия. – 1910. – Т. 50, № 10. – С. 101 – 111.
6. Ценов И. Нови форми на общите уравнения на движението на Материалните Системи / И. Ценов // Годишник Софийск. ун – та. – Болгария, 1949. – Т. 45, кв. 1. – С. 233 – 261.
7. Ценов И. Об одной новой форме уравнений аналитической динамики / И. Ценов // ДАН СССР. – 1953. – Т. 89, № 1.
8. Чаплыгин С.А. О катании шара по горизонтальной плоскости / С.А. Чаплыгин // Собр. Соч. – М.,Л.: ГИТТЛ, 1948. – Т. 1. – С. 76 – 101.
9. Келдыш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси / М.В. Келдыш // Труды ЦАГИ. – 1945. – № 564.
10. Борисов А.В. О движении шара Чаплыгина по наклонной плоскости / А.В. Борисов, И.С. Мамаев // Докл. РАН. – 2006. – Т. 406, № 5. – С. 620 – 623.
11. Лурье А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961.
12. Шульгин М.Ф. Об аналитической динамике в квазикоординатах / М.Ф. Шульгин // Труды Института математики и механики АН Уз.ССР. – 1953. – Т. 10. – Ч. 2.

Надійшла до редколегії 20.02.2012.

В. М. Стрельніков

РУХ ВАЖКОГО ТІЛА ЕЛІПСОЇДАЛЬНОЇ ФОРМИ ПО ПОВЕРХНІ ГЕЛІКОЇДА В УМОВАХ НЕГОЛОНОМНОГО ЗВ'ЯЗКУ

Отримано систему диференціальних рівнянь, що описують кочення еліпсоїда по поверхні гелікоїду у полі сили тяжіння. Завдання вирішене для неголономного зв'язку однокрапкового контакту ідеально шорсткуватих поверхонь. Як узагальнені координати прийняті кутові величини, що описують положення крапки контакту, і кути Эйлера, що визначають положення еліпсоїда на гвинтовій поверхні. Обґрунтовано початкові й граничні умови.

Ключові слова: *еліпсоїд, гелікоїд, неголономний зв'язок, узагальнені координати, кути Эйлера, рівняння Аппеля.*

V. N. Strelnikov

MOTION OF THE ELLIPSOIDAL SHAPE HEAVY BODY ON THE HELICOID SURFACE IN THE NONHOLONOMIC LINK CONDITIONS

The system of the differential equations presenting a rolling of an ellipsoid on a helicoid surface in the gravity field is obtained. The problem is solved for nonholonomic link of single-point contact of ideally rough surfaces. In the capacity of generalised coordinates the angular magnitudes presenting a rule of a point of contact, and Euler's defining a rule of an ellipsoid on a helical surface the angles are accepted. Are justified initial and boundary conditions.

Keywords: *ellipsoid, helicoid, nonholonomic link, generalised coordinates, Euler's angles, Appel's equations.*