УДК 539.3

Н. Д. Джафаров
Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия, Азербайджан
Тел: +38 (044) 2353381; *E-mail:* nizami_cd@mail.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК БЕТОННОГО ПОКРЫТИЯ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И ПОРИСТОСТИ

В данной статье рассматриваются перемещения точек покрытия на жестком основании. Основываясь на структуру покрытия, предполагается, что в материале существуют поры. Эти поры описываются в рамках теории повреждаемости. Из условия закрытия пор при сжатии покрытия найдены предельные значения нагрузки и перемещения. Анализ решения задачи проводился для различных физических соотношений. Было показано влияние начального значения относительного объема пустота.

Ключевые слова: *предельное значение нагрузки, пора, повреждаемость, физическая нелинейность.*

Введение

Одним из основных механических характеристик покрытия является перемещение точек наружной поверхности, находящейся под действием нормальной силы. Эта величина характеризует прочность покрытия. В самом деле, исходя из структуры асфальта и технологии ее нанесение, следует, что чем меньше объем пор, тем меньше величина рассматриваемого перемещения. Следовательно, чем меньше перемещение, тем прочнее покрытие. Для определения этого перемещения выделим из покрытия поперечную призму с площадью поперечного сечения F (рис.1). Высота призмы равна L толщина покрытия.

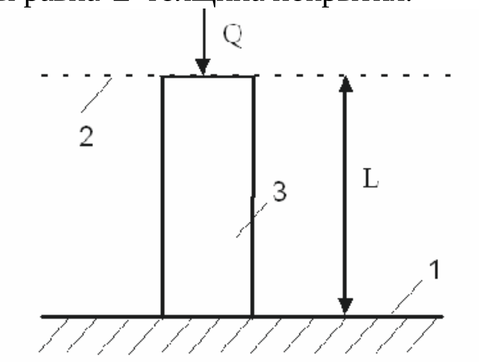

Рис. 1. Расположение выделенной призмы в покрытии: 1 – основание; 2 – покрытие; 3 – выделенная призма

Предположим, что один торец призмы $(x = L)$ нагружен продольной силой Q, а другой, находящейся на жестком основании $(x = 0)$ не перемещается, т.е. $U = 0$, где U - продольное перемещение, x - продольная координата. Определим перемещение нагруженного торца, т.е. определим U при $x = L$.

Основная часть

Рассматриваемая величина состоит из двух слагаемых: из взаимного перемещения твердых частиц, вызванных их деформацией и из изменения объема пор. Качество нанесения покрытия характеризуется малым объемом пор: чем меньше объем пор, тем лучше покрытие. Так как изменение объема пор характеризует покрытие, то определим перемещение, вызванное этим изменением.

Опишем поведение призмы в рамках теории стержней [1]. Тогда напряженно-деформированное состояние, в частности ω, не зависит от поперечной координаты [1].

Так как связующее вещество обладает реологическими свойствами, то перемещение зависит от времени. Учитывая, что Q прикладывается в определенный момент времени (при поведении мониторинга сила Q прикладывается в начальный момент времени), то, пренебрегая переходными процессами, можно предположить, что процесс сжатия происходить мгновенно. Поэтому реологические процессы в призме не будут рассматриваться. Кроме того, предположим, что деформацией твердых частиц по сравнению с деформацией связующего материала можно пренебречь, т.е. предположим, что твердые частицы являются абсолютно твердыми.

Рассмотрим условие равновесия призмы. Из уравнения равновесия следует, что $\sigma_e = Q \cdot F^{-1} = p = const$ [1]. Под действием истинного напряжения σ_s деформируются твердые частицы, соединенные между собой связующим веществом. Так как твердые частицы не деформируется, то под действием напряжения σ_s перемещаются, как абсолютно твердое тело, в связующем материале. В результате этого перемещения деформируется связующий материал. Отметим, что вращением твердых частиц пренебрегаем, рассматривается лишь плоскопараллельное движение [2]. Так как поведение связующего материала описывается вязкоупругой жидкостью, то под действием истинного напряжения связующий материал не сжимается, а сдвигается. Таким образом, получаем, что твердые и частицы перегруппировываются, в результате чего уменьшается объем пор. При этом объем «скелета» не изменяется, меняется лишь форма «скелета». Этот процесс схематично можно представить следующим образом (рис. 2.).

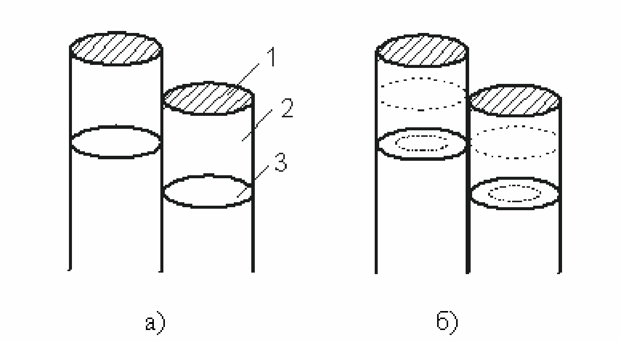

Рис. 2. Схема уменьшения пор. а) до деформации; после деформации (штрих – новое положение твердых частиц и пор): 1 – твердые частицы, 2– связующий материал, 3– поры

В результате деформации твердые частицы перемешаются. Это приводит к изменению объема пор. Ни твердые частицы, ни связующий материал не сжимаются [3].

Найдем величину параметра ω. Из определение следует

$$\omega = \frac{V_p}{V} = \frac{V - V_s}{V} = \left[V_0 \left(1 + \frac{\partial U}{\partial x} \right) - V_s \right] \cdot \left[V_0 \left(1 + \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right]^{-1}, \qquad (1)$$

где V - объем призмы, V_p - объем пор в рассматриваемой призме, V_s - объем «скелета», V_0 - начальный (до деформации) объем призмы. При написании (1) предполагалось V_s не изменяется при деформации и что относительное изменение объема V_0 равно $1 + \frac{\partial U}{\partial x}$ при малых перемещениях [1].

$$\omega = \frac{V_0 - V_s}{V_0} + \frac{\partial U}{\partial x} = \omega_0 + \frac{\partial U}{\partial x} \quad , \qquad (2)$$

ω_0 - начальное значение параметра ω, т.е. начальный относительный объем. Предположим, что материал покрытия «в целом» проявляет нелинейные свойства т.е. $\frac{\partial U}{\partial x} = f(\sigma_s)$ где f - нелинейная функция, характеризующая физическое состояние материала. Функция f является несимметричной функцией $f(\sigma_s) = f(-\sigma_s)$. Тогда соотношение (2) примет вид

$$\omega = \omega_0 - f\left(\frac{p}{1-\omega}\right), \qquad (3)$$

В общем случае величина ω характеризуется не только функцией f. Зависимость ω от p имеет более сложный характер, чем соотношение (3), и определяется из экспериментов. Обобщим соотношение (3). Параметр ω аналогичен параметру повреждаемости в теории рассеянного разрушения [1]. В этой теории кинематическое уравнение для определения параметра повреждаемости берется в дифференциальной форме. По аналогии с кинематическим уравнением повреждаемости уравнение (3) обобщается следующим образом:

$$\frac{d\omega}{dp} = \varphi\left(\frac{p}{1-\omega}\right), \omega = \omega_0 \text{ при } p = 0, \qquad (4)$$

где φ- некоторая функция нелинейности. По аналогии с этой теорией физическое соотношение можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\varepsilon}{dp} = \Phi\left(\frac{p}{1-\omega}\right), \ \varepsilon = 0 \text{ при } p = 0. \qquad (5)$$

Отметим, что замена нелинейного алгебраического уравнения обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка упрощает решение исходного уравнения.

Решение задачи

Рассмотрим уравнение (3), приняв физическое соотношение линейным. Тогда имеем

$$\omega = \omega_0 - \frac{p}{1-\omega}\frac{1}{E},$$

где E - модуль упругости связующего материала. Из физической сути пор следует, что $0 \le \omega \le \omega_0$, т.е. величина ω положительна и меньше начального значения. Практически $\omega \ne 0$, т.е. поры никогда «несхлопываются» (не закрываются). Однако, для анализа решения, гипотетически, можно принять, что $\omega = 0$. Это условие позволяет определить предельное значение нагрузки p_{cr}. Учитывая в (6) равенство $\omega = 0$, имеем $p_{cr} = E \cdot \omega_0$. Это значение нагрузки соответствует закрытию пор. Кроме того, для рассматриваемого случая, эта нагрузка соответствует нагрузке, после которой призма не деформируется. В общем случае при $p > p_{cr}$ надо менять модель расчета, т.к. закрытие пор соответствует «сплошности» [4]. Уравнение (6) представим в виде

$$\tau = (\omega_0 - \omega)(1-\omega); \quad \omega = \frac{1}{2}\left[1 + \omega_0 - \sqrt{(1-\omega_0)^2 + 4\tau}\right]; \quad \tau = \frac{p}{E}. \qquad (7)$$

Знак перед корнем квадратным выбирается, основываясь на начальное условие: $\omega = \omega_0$, при $\tau = 0$. Определим стационарное значение функции $\tau = \tau(\omega)$. Из условия стационарности следует

$$\frac{d\tau}{d\omega} = -(1-\omega) - (\omega_0 - \omega) = -1 - \omega_0 + 2\omega = 0; \;\; \omega_S = \frac{1}{2}(1+\omega_0).$$

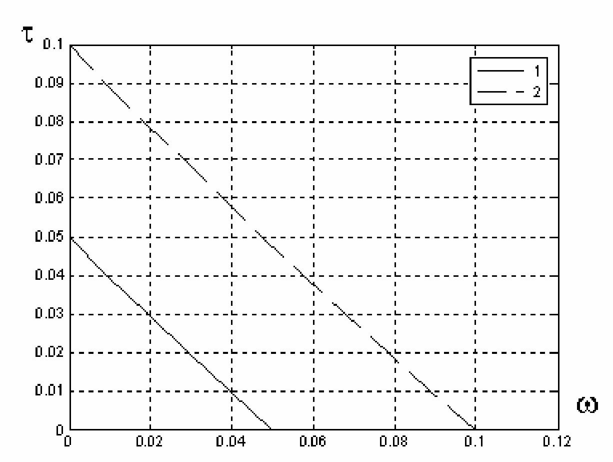

Рис. 3. Зависимость τ от ω (линейный случай): 1 - $\omega_0 = 0.05$; 2 - $\omega_0 = 0.1$

Так как $\omega_c > \omega_0$ $(1 > \omega_0)$, т.е. ω_c не входит в рассматриваемый диапазон, то стаци-онарная точка для τ не рассматривается. Зависимость τ от ω представлена на рис. 3.

Из графика следует, что с увеличением начального объема пор при фиксированном значении ω действующая нагрузка увеличивается.

Определим перемещения нагруженного торца, т.е. $U/_{x=L}$. Из физического соотношения следует:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{E}\frac{p}{1-\omega} = -2\tau\left[1-\omega_0 + \sqrt{(1-\omega_0)^2 + 4\tau}\right]^{-1}.$$

Учитывая, что $U = 0$ при $x = 0$, следует

$$S = 2\tau\left[1-\omega_0 + \sqrt{(1-\omega_0)^2 + 4\tau}\right]^{-1}; \qquad S = \frac{|U(L)|}{L}. \qquad (8)$$

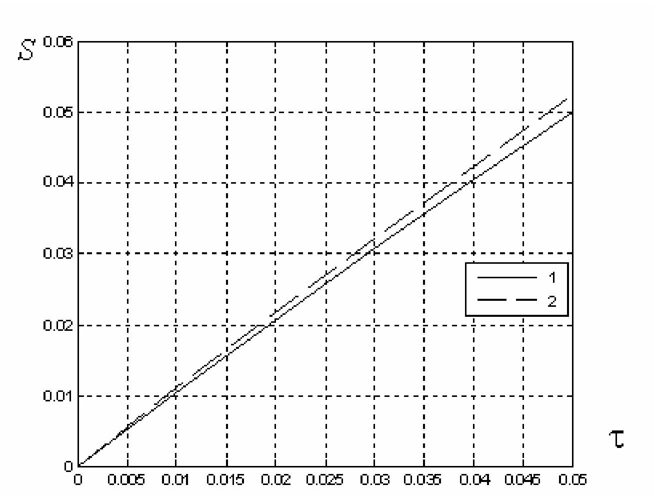

Рис. 4. Зависимость S от τ (линейный случай): 1 - $\omega_0 = 0.05$; 2 - $\omega_0 = 0.1$

Так как $\tau < \tau_{cr} = \omega_0$, - то следует, что $0 \le S \le S_{cr}$ где $S_{cr} = \omega_0$.

Соотношение (8) определяет зависимость осадки верхней поверхности покрытия от нагрузки. Отметим, что осадок имеет ограничение: $S < \omega_0$. Зависимость S от τ представлена на рис. 4.

Отметим, что соотношение (8) является нелинейным. Учитывая, что $\tau << 1$ и что это соотношение получено в рамках геометрически линейной теории, линеаризуем соотношение (8) для получения упрощенной зависимости.

$$S = 2\tau\left[2(1-\omega_0) + \frac{1}{2}\tau\frac{4}{1-\omega_0}\right]^{-1} = \frac{\tau}{1-\omega_0}, \quad \tau = S(1-\omega_0).$$

На рис.5 приводится сопоставление нелинейного уравнения с линеаризированным. Сплошные линии соответствуют нелинейному уравнению, штриховые-линеаризированному.

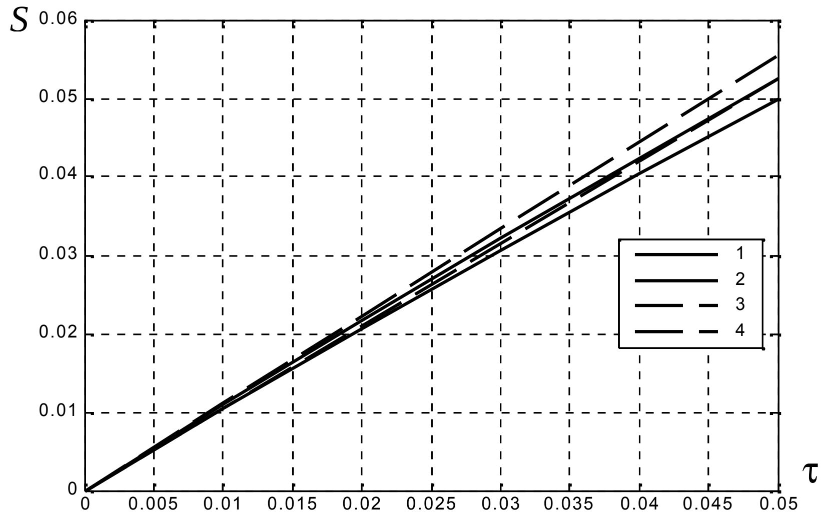

Рис. 5. Сопоставление нелинейного уравнения с линеаризированным: 1- при $\omega_0 = 0.05$ (нелинейный); 2 - при $\omega_0 = 0.1$ (нелинейный); 3 - при $\omega_0 = 0.05$ (линейная зависимость); 4 - при $\omega_0 = 0.1$; (линейная зависимость)

Из сопоставления графиков следует, что существует такой диапазон нагрузок, при которых, с определенной точностью, решение нелинейного уравнения совпадает с решением линеаризованного уравнения, совпадает с решением линеаризованного уравнения. При этом диапазон увеличивается с увеличением начального значения параметра ω.

Из постановки задачи ясно, что чем больше осадок (S), тем больше объем пор (ω) при фиксированном значении нагрузки τ, т.е. качество покрытие хуже. При мониторинге замеряется величина осадка $U(L)$, образованная под действием известной силы Q. Мониторинг можно проводить, изменяя пошагово значение Q и измеряя величину $U(L)$. Однако целесообразно мониторинг проводить следующим образом: увеличивать значение приложенной нагрузки (Q) до такого значения (Q_{cr}), при котором осадок не будет изменяться. Тогда замеряется предельное значение осадка U_{cr} и предельное значение нагрузки Q_{cr}. Отметим, что эти предельные значения соответствуют критическим. Зная толщину покрытия L, имеем что $S_{cr} = \frac{U_{cr}}{L}$. Так как

$S_{cr} = \omega_0$, то $\omega_0 = \frac{1}{L} U_{cr}$. Найденное значение ω_0 характеризует качество покрытия. Чем меньше ω_0 тем лучше покрытие. Кроме того, можно определить значение модуля упругости E, которое используется при проведении расчета других механических показателей покрытия. В самом деле:

$$E = \frac{p}{\tau} = \frac{Q}{F\tau} = \frac{Q_{cr}}{F\tau_{cr}} = \frac{Q_{cr}}{F\omega_0} = \frac{Q_{cr} \cdot L}{F \cdot U_{cr}}.$$

Таким образом, предложена линейная модель поведения покрытия дороги с учетом существования пор. В рамках этой модели определено напряженно-деформированное состояние сжатой призмы, выделенной из покрытия в поперечном направлении. Определено критическое состояние, характеризующее его качество.

Рассмотрим уравнение (3) приняв физическое соотношение нелинейным, в частности, кубическим. Тогда имеем:

$$\omega = \omega_0 - A\left(\frac{p}{1-\omega}\right)^3 = \omega_0 - A_0\left(\frac{\tau}{1-\omega}\right)^3; \quad A_0 = AE^3, \tag{9}$$

где A - коэффициент, определяемый из эксперимента. Определим пределы существования соотношения (9). Так как $0 \le \omega \le \omega_0$, то $\tau < \tau_{cr}$, где $\tau_{cr} = \left(\frac{\omega_0}{A_0}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Преобразуем уравнение (9) к следующему виду:

$$\tau = \left[(\omega_0 - \omega)\frac{1}{A_0}(1-\omega)^3\right]^{\frac{1}{3}} = (1-\omega)\left(\frac{\omega_0 - \omega}{A_0}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Определим стационарное значение функции $\tau = \tau(\omega)$.

Из условия стационарности следует:

$$\frac{d\tau}{d\omega} = A_0^{-\frac{1}{3}}\left[-(\omega_0 - \omega)^{\frac{1}{3}} - (1-\omega)\frac{1}{3}(\omega_0 - \omega)^{-\frac{2}{3}}\right] =$$

$$= -A_0^{-\frac{1}{3}} \cdot (\omega_0 - \omega)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\omega_0 + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\omega\right) = 0; \quad \omega_c = \frac{1}{4}(3\omega_0 + 1).$$

Так как $\omega_c > \omega_0$, то стационарная точка τ не рассматривается. Зависимость τ от ω представлена на рис. 6. Отметим, что построенная ветвь графика является однозначной. Из графика следует, так же как и для линейного случая, что с увеличением начального объема пор при фиксированном значении ω значение приложенной нагрузки увеличивается.

Перемещение нагруженного торца определяется из следующего уравнения:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -A_0\left(\frac{\tau}{1-\omega}\right)^3.$$

После интегрирования по x с учетом граничного условия имеем

$$U = -A_0\left(\frac{\tau}{1-\omega}\right)^3 x\,.$$

Окончательно получим, что

$$S = A_0\left(\frac{\tau}{1-\omega}\right)^3 = \omega_0 - \omega(\tau)\,;\;\; \omega(\tau) = \omega_0 - A_0\left(\frac{\tau}{1-\omega}\right)^3 . \qquad (10)$$

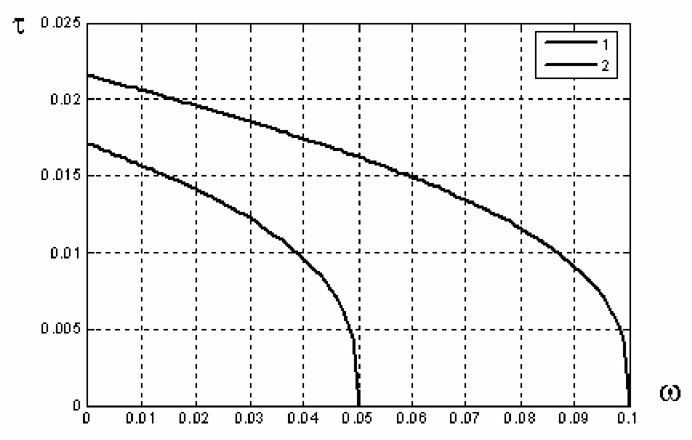

Рис. 6. Зависимость τ от ω (кубическое соотношение): 1 - $\omega_0 = 0.05$; 2 - $\omega_0 = 0.1$

Предельное значение осадка равна ω_0 т.е. $0 \le S \le S_{cr}$; $S_{cr} = \omega_0$.

Отсюда получаем, что предельное значение осадка не зависит от вида физического соотношения, если $f(0) = 0$. Зависимость S от τ представлена на рис. 7.

Линеаризируем соотношение (10). Это соотношение линиеаризовать по τ невозможно т.к. τ входит в уравнение в виде τ^3. Учитывая, что $S \ll 1$, линеаризуем его по S. Так как $\omega = \omega_0 - S$, то

$$A_0\tau^3 = (\omega_0 - \omega)(1-\omega)^3 = (\omega_0 - \omega + S)(1-\omega_0 + S)^3 = S(1-\omega_0 + S)^3 \approx S(1-\omega_0)^3 .$$

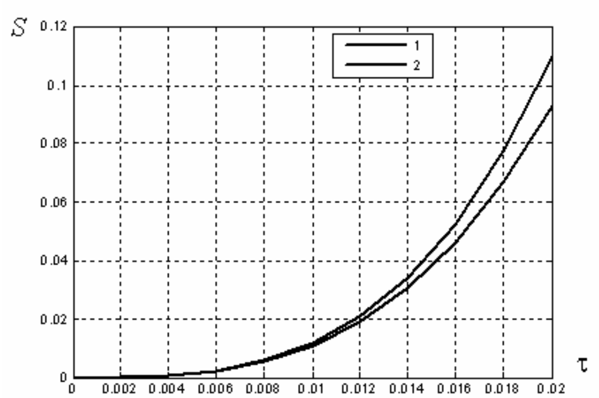

Рис. 7. Зависимость S от τ (кубическое соотношение): 1 - $\omega_0 = 0.05$; 2 - $\omega_0 = 0.1$

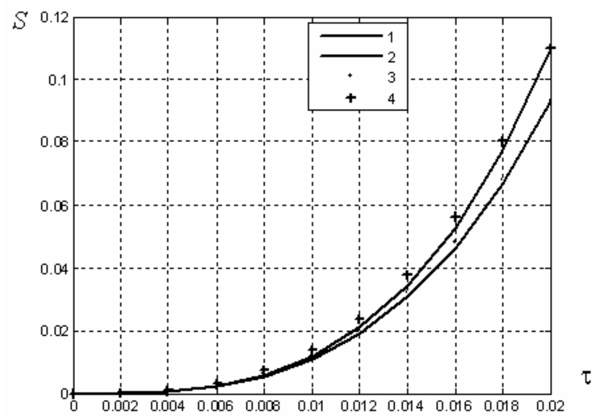

Рис. 8. Сопоставление нелинейного уравнения с линеаризованным: 1- при $\omega_0 = 0.05$ (нелинейный); 2 - при $\omega_0 = 0.1$ (нелинейный); 3 - при $\omega_0 = 0.05$ (линеаризованная зависимость) 4 - при $\omega_0 = 0.1$; (линеаризованная зависимость)

Отсюда следует, что

$$S = A_0\left(\frac{\tau}{1-\omega}\right)^3; \quad \tau = (1-\omega_0)\sqrt[3]{\frac{S}{A_0}}. \tag{11}$$

Сопоставление нелинейного уравнения с линеаризованным представлен на рис. 8.

Выводы

Из сопоставления графиков следует, что существует такой диапазон нагрузок, при которых, с определенной точностью, решение нелинейного уравнения совпадает с решением упрощенного уравнения. При этом диапазон увеличивается с увеличением начального значения ω.

Список литературы:

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
2. Деформативная способность асфальтовых покрытий и оснований // ВИНИТИ. – 1975. – 38. – С. 1-29.
3. Дорожно-строительные материалы / Глушко И.М. и др. – М.: Транспорт, 1983. – 383 с.
4. Рустамов Т.А. Сжатие стержня из пористого материала с учетом больших перемещений / Т.А. Рустамов // Механика. Машиностроения. Министерство Образования Азербайджанской Республики. – Баку, 2006. – №1. – С. 22 – 23.
5. Микульский В.Г. Строительные материалы (материаловедение) / В.Г. Микульский. – М.: Изд. АСВ, 2004. – Ч. I. – 536 с.

Надійшла до редколегії 30.01.2012.

Н.Д. Джафаров

ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕННЯ ТОЧОК БЕТОННОГО ПОКРИТТЯ З УРАХУВАННЯМ ФІЗИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ І ПОРИСТОСТІ

У даній статті розглядаються переміщення точок покриття на жорсткій основі. Ґрунтуючись на структуру покриття, передбачається, що в матеріалі існують пори. Ці пори описуються в рамках теорії пошкоджуваності. З умови закриття пір при стискуванні покриття знайдені граничні значення навантаження і переміщення. Аналіз рішення задачі проводився для різних фізичних співвідношень. Було показано вплив початкового значення відносного об'єму порожнеча.

***Ключові слова**: граничне значення навантаження, пора, пошкоджуваність, фізична нелінійність .*

N.D. Jafarov

DETERMINATION OF DISPLACEMENT OF POINTS OF CONCRETE COVER TAKING INTO ACCOUNT PHYSICAL NON-LINEARITY AND POROSITY

This article describes the displacement of the cover points on the hard ground. Based on the structure of the coating, it is assumed that there are pores in the material. These pores are described in the framework of the damage theory. From the condition of the closing of the pores during compression of the coating the limit values of load and displacement are found. Analysis of the solution was carried out for various physical relations. It has been shown the influence of the initial value of the relative volume of void.

***Keywords:** limited value of load, pore, damageability, physical non-linearity.*