

МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ПАРАМЕТРІВ ЗБУРЕНЬ НА РОБОТУ ДВОГІРОСКОПНОГО ГРАВІМЕТРА АВІАЦІЙНОЇ ГРАВІМЕТРИЧНОЇ СИСТЕМИ

Безвесільна О.М., Коваль А.В. (НТУУ "КПІ", ЖДТУ, м. Київ, м. Житомир,
Україна, Україна)

Тел. +38 (044)236-09-26; E-mail: bezvesilna@mail.ru,
Тел. +38 (093)772-08-88; E-mail: koval.anton@gmail.com

Анотація: Отримано аналітичні оцінки впливу амплітуди та частоти збурень основи двогіроскопного гравіметра авіаційної гравіметричної системи на параметри його руху

Ключові слова: акселерометр, збурення, амплітуда, частота

1. Вступ

Актуальною є проблема підвищення точності гравіметричних досліджень [1] авіаційними системами у важкодоступних місцях. Одним із шляхів досягнення цієї мети є застосування двогіроскопних систем. В роботі розглядається задача оцінки впливу збурень основи гравіметра на основні параметри його руху.

2. Основний зміст та результати роботи

Розглянемо рівняння руху двогіроскопного гравіметра (ДГ). В розглядуваній системі обидва гіроскопи мають однакові параметри, а відрізняються лише напрямком головного кінетичного моменту $\vec{H}$ та, відповідно, напрямками моментів корекції. Математично це буде виражатись знаком величин H , k_1 , k_2 . Для одного гіроскопа ці величини будуть додатними, для другого – від'ємними.

Застосуємо прецесійні рівняння руху одногогіроскопного гравіметра (ОГ) [1] та проведемо аналіз з метою їх застосування для дослідження руху ДГ

$$\begin{aligned} H\ddot{\beta} + c_1\dot{\alpha} + k_1\beta &= 0; \\ c_2\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} - k_2\alpha - ml \cdot \omega_y \beta &= -ml \cdot g - ml \cdot \omega_z \end{aligned} \quad (1)$$

де c_1 , c_2 – коефіцієнти в'язкого тертя; $\omega_y(t) = \omega_b \cdot \sin(\omega t + \varepsilon)$, $\omega_z(t) = \omega_a \cdot \sin(\omega t)$ збурення основи ДГ.

Перейдемо від рівнянь (1) до одного рівняння, виключивши α . Отримаємо

$$\begin{aligned} (c_1c_2 + H^2)\ddot{\beta} + (H(k_1 + k_2) - c_1ml \cdot \omega_b \cdot \sin(\omega t + \varepsilon))\dot{\beta} + \\ + (k_1 \cdot k_2 - c_1ml \cdot \omega \cdot \omega_b \cdot \cos(\omega t + \varepsilon))\beta = -c_1ml \cdot \omega \cdot \omega_a \cdot \cos \omega t \end{aligned} \quad (2)$$

Оскільки знаки виразів H^2 , $H(k_1 + k_2)$, $k_1 \cdot k_2$ однакові для обох гіроскопів, а решта їх параметрів співпадають, то, в рамках прийнятих наближень, їх розв'язки для β також однакові. Однак, для кута α це не виконується в силу співвідношень (1). Для проведення досліджень розв'язку рівняння (2) поділимо обидві його частини на $c_1c_2 + H^2$ та застосуємо [1] умову $H^2 \gg c_1c_2$. Отримаємо

$$\ddot{\beta} + (2n - L \cdot \sin(\omega t + \varepsilon))\dot{\beta} + (\omega_0^2 - L \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varepsilon))\beta = -N \cdot \omega \cdot \cos \omega t, \quad (3)$$

де згідно з [1]

$$n = \frac{k_1 + k_2}{2H}, \quad L = \frac{c_1 ml \cdot w_b}{H^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{k_1 \cdot k_2}{H^2}, \quad N = \frac{c_1 ml \cdot w_a}{H^2}.$$

Згідно з [2] розв'язок рівняння (3) може бути записаним у вигляді рекурентного співвідношення

$$\ddot{\beta}_{p+1} + 2n\dot{\beta}_{p+1} + \omega_0^2\beta_{p+1} = L \cdot \sin(\omega t + \varepsilon)\dot{\beta}_p + L \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varepsilon)\beta_p - N \cdot \omega \cdot \cos \omega t, \quad (4)$$

де $p = 0, 1, 2, \dots$; $\beta_0(t)$ нульове наближення, яке є розв'язком наступного диференціального рівняння

$$\ddot{\beta}_0 + 2n\dot{\beta}_0 + \omega_0^2\beta_0 = -N \cdot \omega \cdot \cos \omega t, \quad (5)$$

Загальний розв'язок рівняння (5) [3] буде мати вигляд:

$$\beta_0(t) = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t} + \tilde{\beta}(t),$$

де D_1, D_2 – довільні сталі; $\tilde{\beta}$ будь-який частинний розв'язок рівняння (5), який знаходимо методом невизначених коефіцієнтів. Враховуючи, що $\lambda_1 < -1$, $\lambda_2 < -1$ отримаємо

$$\tilde{\beta}_0(t) = P_0 \cos \omega t + Q_0 \sin \omega t, \quad (6)$$

де коефіцієнти P_0, Q_0 знаходимо із умови, що (6) задовольняє рівняння (5).

Отримаємо

$$P_0 = \frac{-N\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}, \quad Q_0 = \frac{-2nN\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2n\omega)^2}. \quad (7)$$

Аналогічно із (4) запишемо рівняння для наступного наближення $\beta_1(t)$:

$$\ddot{\beta}_1 + 2n\dot{\beta}_1 + \omega_0^2\beta_1 = f_1(t), \quad (8)$$

$$f_1(t) = -N \cdot \omega \cdot \cos \omega t + L \cdot \sin(\omega t + \varepsilon)\dot{\beta}_0(t) + L \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varepsilon)\beta_0(t).$$

Рівняння (8) аналогічно рівнянню (5) і відрізняється лише правою частиною, тому його розв'язок будемо шукати за тим же алгоритмом:

$$\beta_1(t) = M \cos \omega t + R \sin \omega t + B \cos(2\omega t + \varepsilon) + C \sin(2\omega t + \varepsilon). \quad (9)$$

де невідомі коефіцієнти M, R, B, C шукаємо із умови, що (9) є розв'язок рівняння (8).

Підставляючи (9) у рівняння (8) та прирівнюючи коефіцієнти при відповідних тригонометричних функціях, отримаємо системи алгебраїчних рівнянь, розв'язки яких матимуть вид

$$\begin{aligned}
M &= \frac{-N \cdot \omega(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}; & R &= \frac{-2N \cdot n\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}; \\
B &= \frac{L \cdot P_0\omega(\omega_0^2 - 4\omega^2) - LQ_0\omega 4n\omega}{(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16n^2\omega^2}; & C &= \frac{L \cdot P_0\omega 4n\omega + LQ_0\omega(\omega_0^2 - 4\omega^2)}{(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16n^2\omega^2}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Аналогічно знайдемо друге наближення, застосувавши співвідношення (4)

$$\ddot{\beta}_2 + 2n\dot{\beta}_2 + \omega_0^2\beta_2 = -N \cdot \omega \cdot \cos \omega t + L \cdot \sin(\omega t + \varepsilon)\dot{\beta}_1(t) + L \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varepsilon)\beta_1(t). \tag{11}$$

Розв'язок рівняння (11) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned}
\beta_2(t) &= A_\beta \sin(\omega t + \varepsilon_1) + A_{21} \sin(\omega t + \varepsilon_2 + \delta_1) + A_{22} \sin(2\omega t + \varepsilon + \delta_2) + \\
&+ A_{23} \sin(3\omega t + 2\varepsilon + \varepsilon_2 + \delta_3),
\end{aligned} \tag{12}$$

де

$$\begin{aligned}
A_\beta &= \frac{N\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}; & A_{21} &= \frac{L^2 \cdot N \cdot \omega^3}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2\right)\sqrt{(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16n^2\omega^2}}; \\
A_{22} &= \frac{LN\omega^2}{\sqrt{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2\right]\left[(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16n^2\omega^2\right]}}; \\
A_{23} &= \frac{2\omega^3 L^2 N}{\sqrt{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2\right]\left[(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16n^2\omega^2\right]\left[(\omega_0^2 - 9\omega^2)^2 + 36n^2\omega^2\right]}};
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 = \operatorname{atan} 2\left(-(\omega_0^2 - \omega^2), -2n\omega\right); \quad \delta_1 = \operatorname{atan} 2\left(2n\omega, -\omega_0^2 + \omega^2\right);$$

$$\delta_2 = \operatorname{atan} 2\left(-4n\omega, \omega_0^2 - 4\omega^2\right); \quad \delta_3 = \operatorname{atan} 2\left(-6n\omega, \omega_0^2 - 9\omega^2\right).$$

Очевидно, що за таким алгоритмом можна отримувати й наступні наближення. Із першого рівняння системи (1) знаходимо

$$\alpha_2(t) = -\frac{H}{c_1}\beta_2(t) - \frac{k_1}{c_1} \int_0^t \beta_2(\tau) d\tau$$

або після інтегрування, групування доданків відносно тригонометричних функцій з однаковими аргументами та стандартних перетворень отримуємо

$$\alpha_2(t) = A_\beta A_\alpha \sin(\omega t + \varepsilon_1 + \varepsilon'_1) + A_{21} A_\alpha \sin(\omega t + \varepsilon_2 + \delta_1 + \varepsilon'_1) + \tag{13}$$

$$+ A_{22}A_{2\alpha} \sin(2\omega t + \varepsilon + \delta_2 + \varepsilon'_2) + A_{23}A_{3\alpha} \sin(3\omega t + 2\varepsilon + \varepsilon_2 + \delta_3 + \varepsilon'_3) - \\ - \frac{k_1}{c_1\omega} \left\{ A_\beta \cos \varepsilon_1 + A_{21} \cos(\varepsilon_2 + \delta_1) + \frac{A_{22}}{2} \cos(\varepsilon + \delta_2) + \frac{A_{23}}{3} \cos(2\varepsilon + \varepsilon_2 + \delta_3) \right\},$$

де

$$A_\alpha = \frac{1}{c_1} \sqrt{H^2 + \frac{k_1^2}{\omega^2}}; \quad \varepsilon'_1 = \text{atan2}\left(\frac{k_1}{\omega}, -H\right); \quad \varepsilon'_2 = \text{atan2}\left(\frac{k_1}{2\omega}, -H\right); \\ A_{2\alpha} = \frac{1}{c_1} \sqrt{H^2 + \frac{k_1^2}{4\omega^2}}; \quad A_{3\alpha} = \frac{1}{c_1} \sqrt{H^2 + \frac{k_1^2}{9\omega^2}}; \quad \varepsilon'_3 = \text{atan2}\left(\frac{k_1}{3\omega}, -H\right).$$

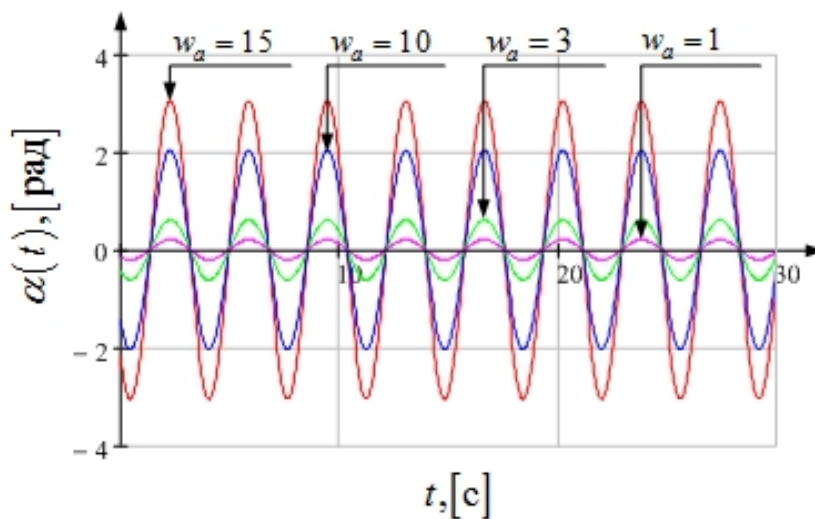


Рис. 1.

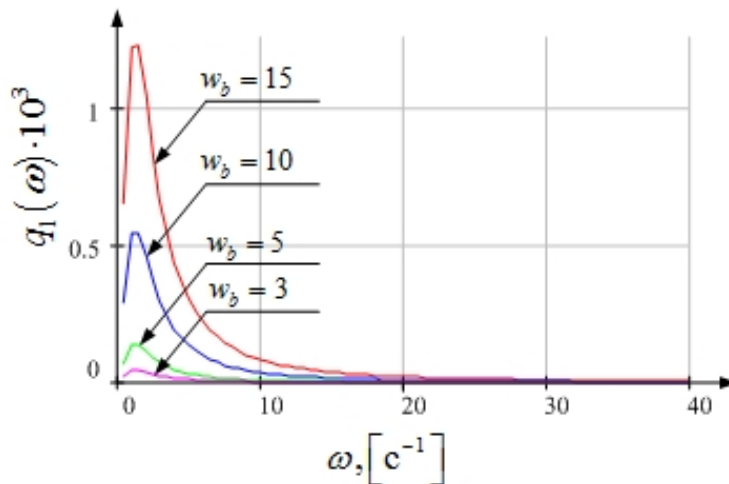


Рис. 2.

3. Відношення амплітуди другого доданку до першого

3. Заключення

Із співвідношень (13) можна зробити наступні висновки:

1. Усталені вимушені коливання в другому наближенні представляють суму коливань з частотами кратними частоті збурень ω . Зсув фаз визначається як частотою збурень так і параметрами H , k_1 , k_2 , c_1 , c_2 , m , l кожного акселерометра ДГ (рис. 1).

2. Амплітуди усталених вимушених коливань з відповідними частотами визначаються як параметрами ДГ, так і амплітудами w_a , w_b , частотою ω та зсувом фази ε між складовими збурення

$$w_z(t) = w_a \sin \omega t, \\ w_y(t) = w_b \sin(\omega t + \varepsilon).$$

$$q_1 = \frac{A_{21}}{A_\beta} = \frac{L^2 \cdot \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} \sqrt{(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16n^2\omega^2}}$$

значно менше одиниці та зменшується із зростанням ω (рис. 2). Таким чином, вплив другого доданку є незначним.

4. Відношення амплітуд третього, четвертого доданків до амплітуди першого відповідно дорівнюють

$$q_2 = \frac{A_{22} A_{2\alpha}}{A_\beta A_\alpha} = \frac{\sqrt{4\omega^2 H^2 + k_1^2}}{2\sqrt{\omega^2 H^2 + k_1^2}} \frac{L\omega}{\sqrt{[(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16n^2\omega^2]}}$$

$$q_3 = \frac{A_{23} A_{3\alpha}}{A_\beta A_\alpha} = \frac{\sqrt{9\omega^2 H^2 + k_1^2}}{3\sqrt{\omega^2 H^2 + k_1^2}} \frac{2\omega^2 L^2}{\sqrt{[(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16n^2\omega^2] [(\omega_0^2 - 9\omega^2)^2 + 36n^2\omega^2]}}$$

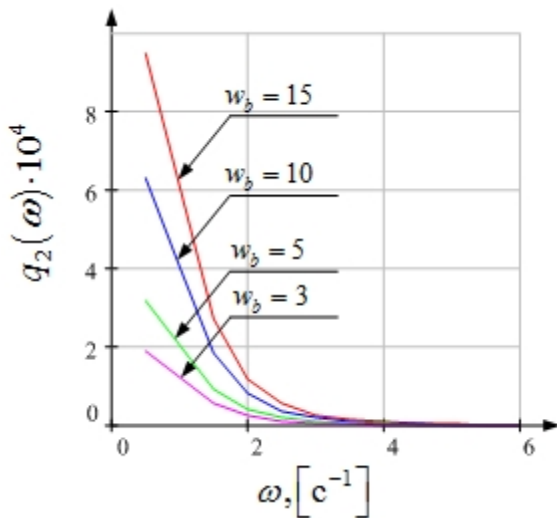


Рис. 3.

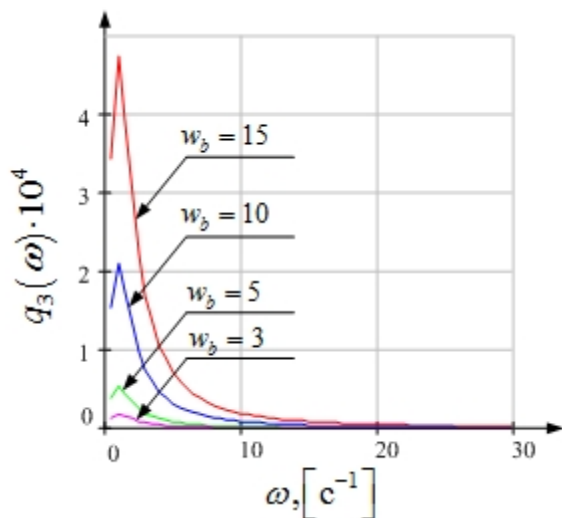


Рис. 4.

і також є малими величинами, їх залежності від ω та інших параметрів представлені на рис. 3–4. Очевидно, що із зростанням ω вплив цих доданків зменшується.

5. Вказані відношення амплітуд пропорційно зростають із зростанням c_1 , ml , w_b та зменшуються із зростанням H . Графіки цих залежностей представлені на рис. 2–4.

6. Домінуючий вплив в залежність $\alpha_2(t)$ вносить перший доданок виразу (13), його амплітуда пропорційна збуренню w_a . Відповідні залежності представлені на рис. 5.

7. Сумарні (з двох акселерометрів) усталені вимушені коливання в другому наближенні фактично дорівнюють нулю (порядку 10^{-15}).

8. Розв'язок системи (1) чисельними методами мало відрізняється (0.1–0.2)% від (13) для $\omega \geq 5$ (рис. 6).

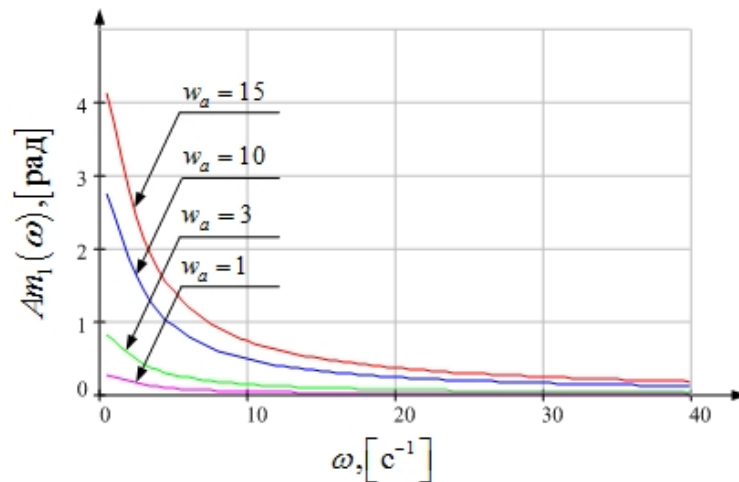


Рис. 5.

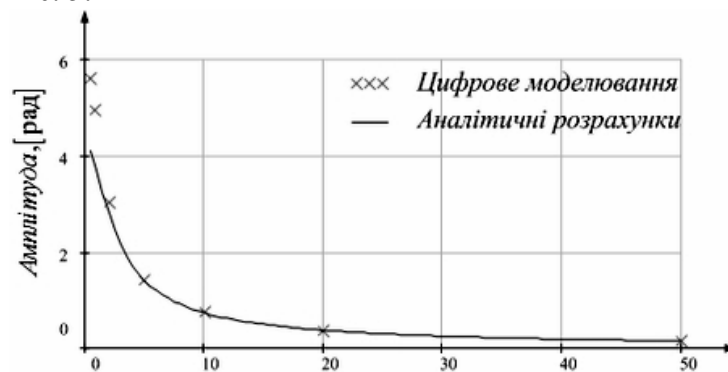


Рис. 6.

Список літератури: 1. Безвесільна О.М. Авіаційні гравіметричні системи та гравіметри: Монографія. – Житомир: ЖДТУ, 2007. – 604с. 2. Хартман Ф., Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970, – 720с. 3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – М.: Наука, 1981, – 720с.

MODELING INFLUENCES OF PARAMETERS OF DISTURBANCES ON WORK OF TWO GYROSCOPE GRAVIMETER OF AVIATION GRAVIMETRIC SYSTEM

Bezvesilna O.M., Koval A.V., (NTUU "KPI", ZSTU, Kyiv, Zhytomyr, Ukraine, Ukraine)

Abstract: Analytical estimations of influence of amplitude and frequency of disturbances of the basis of two gyroscope gravimeter in aviation gravimetric system on parameters of its motion are received

Key words: accelerometer, disturbances, amplitude, frequency

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВОЗМУЩЕНИЙ НА РАБОТУ ДВУХГИРОСКОПНОГО ГРАВИМЕТРА АВИАЦИОННОЙ ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Безвесильная Е.Н., Коваль А.В. (НТУУ "КПИ", ЖГТУ, г. Киев, г. Житомир, Украина, Украина)

Аннотация: Получены аналитические оценки влияния амплитуды и частоты возмущений основы двухгироскопного гравиметра авиационной гравиметрической системы на параметры его движения

Ключевые слова: акселерометр, возмущения, амплитуда, частота

Надійшла до редколегії 14.06.2011 р.