УДК 539.3

К ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СЖИМАЕМОЙ СЛОИСТОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ, ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ПО ДВУМ КРАЯМ И С РАЗЛИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПО ДВУМ ДРУГИМ

Арустамян А.М. *(ГИУА (П), г. Ереван, Армения)*
Тел./Факс. +374 (93) 25 25 83; E-mail: alla-arustamyan@rambler.ru

Аннотация. *В статье рассматривается задача динамической устойчивости слоистой ортотропной пластины, шарнирно опертой по двум краям и с различными граничными условиями по двум другим. Для приближенного решения задачи применен метод Бубнова-Галеркина. Задача сводится к решению уравнения Матье-Хилла. Приведены результаты вычислений для однослойной ортотропной пластины*
Ключевые слова: *динамическая устойчивость, ортотропная пластина, слоистая пластина, угол армирования, критическая сила*

В последние годы интерес к применению анизотропных материалов в конструкциях значительно возрос, что связано с появлением нового класса композиционных материалов, обладающих исключительно высокими механическими характеристиками. Интенсивно расширяющееся внедрение композитов в несущих конструкциях различного назначения требует разработки расчетных моделей и методов, учитывающих особенности структуры и поведения этих материалов. К числу таких особенностей, как известно, относятся их анизотропия, а также слоистый характер.

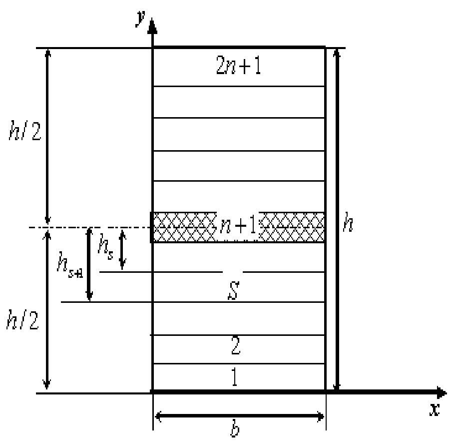

Рис. 1. Сечение слоистой, симметрично собранной ортотропной пластины

В реальных условиях на пластины могут действовать динамические нагрузки, которые приводят к возникновению колебаний. Колебания могут существенно влиять на надежность конструкции в целом.

1. Рассмотрим ортотропную прямоугольную пластину, составленную из $(2n+1)$ симметрично расположенных относительно срединной поверхности слоев, изготовленных путем поочередной укладки элементарных слоев композиционного материала под углами $\pm\varphi_S$ $(s=1, 2,..., 2n+1)$. Слои конструкции, образованные путем поочередной укладки элеметарных слоев композита под углами $\pm\varphi$, можно считать ортотропными (рис. 1).

Уравнение динамической устойчивости сжимаемой слоистой ортотропной прямоугольной пластины (рис.1) имеет вид [1]:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+P_1(t)\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+P_2(t)\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\rho h\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \qquad (1)$$

где ρ – плотность композиционного материала пластины, h – толщина пластины, t – время, $w(x,y,t)$ – поперечный прогиб пластины, $P_1(t)$ и $P_2(t)$ – сжимающие усилия (рис. 2).

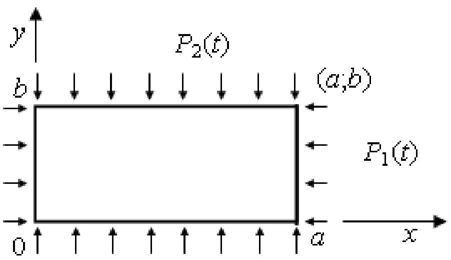

Рис.2. Прямоугольная пластина под действием сжимающих усилий

Жесткости D_{ik} определяются по формуле:

$$D_{ik} = \frac{2}{3}\left(B_{ik}^{n+1} \cdot h_{n+1}^{3} + \sum_{s=1}^{n} B_{ik}^{s}\left(h_s^3 - h_{s+1}^3\right)\right), \quad (2)$$

где B_{ik} – упругие характеристики материала пластины по геометрическим направлениям Ox и Oy, выражаемые через упругие характеристики элементарного слоя B_{ik}^{0} по формулам [2]:

$$\begin{aligned}
B_{11}^{S} &= B_{11}^{0} \cdot \cos^4 \varphi + 2 \cdot B_3^0 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi + B_{22}^{0} \cdot \sin^4 \varphi, \\
B_{22}^{S} &= B_{11}^{0} \cdot \sin^4 \varphi + 2 \cdot B_3^0 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi + B_{22}^{0} \cdot \cos^4 \varphi, \\
B_{12}^{S} &= B_{12}^{0} + (B_{11}^{0} + B_{22}^{0} - 2 \cdot B_3^0) \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi, \\
B_{66}^{S} &= B_{66}^{0} + (B_{11}^{0} + B_{22}^{0} - 2 \cdot B_3^0) \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi,
\end{aligned} \quad (3)$$

Упругие характеристики элементарного слоя вдоль главных физических направлений определяются по формулам [2]:

$$\begin{aligned}
&B_{11}^{0} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \qquad B_{12}^{0} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \qquad B_{66}^{0} = G_{12}, \\
&B_{22}^{0} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \qquad B_{21}^{0} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, \qquad B_{3}^{0} = B_{12}^{0} + 2 \cdot B_{66}^{0}.
\end{aligned} \quad (4)$$

Представим функцию прогиба в виде:

$$w(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} U_m(x) \cdot U_n(y) \cdot w_{mn}(t), \quad (5)$$

где $U_m(x)$, $V_n(y)$ – фундаментальные (балочные) функции, удовлетворяющие граничным условиям на краях пластины.

Подставив функцию прогиба (5) в уравнение устойчивости (1), а после применив метод Бубнова-Галеркина, учитывая свойство ортогональности фундаментальных функций будем иметь:

$$w''_{mn}(t) + \frac{I_1}{I_0 \rho h} w_{mn}(t) - P_1(t)\frac{I_2}{I_0 \rho h} w_{mn}(t) - P_2(t)\frac{I_3}{I_0 \rho h} w_{mn}(t) = 0 . \quad (6)$$

где введены следующие обозначения:

$$I_1 = \int_0^a\int_0^b \left[D_{11}\lambda_m^4 U_m(x)V_n(y) + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda_m^2\mu_n^2 \overline{U_m(x)} \cdot \overline{V_n(y)} + D_{22}\mu_n^4 U_m(x)V_n(y)\right] U_m(x)V_n(y)dxdy,$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \lambda_m^2 \int_0^a\int_0^b \overline{U_m(x) \cdot} U_m(x) \cdot V_n^2(y)dxdy, \\
I_3 &= \mu_n^2 \int_0^a\int_0^b \overline{V_n(y)} \cdot V_n(y) \cdot U_m^2(x)dxdy,
\end{aligned} \quad (7)$$

$$I_0 = \int_0^a\int_0^b U_m^2(x)V_n^2(y)dxdy,$$

причем

$$U_m^{IV}(x) = \lambda_m^4 \cdot U_m(x), \qquad V_n^{IV}(y) = \mu_n^4 \cdot V_n(y),$$
$$U_m''(x) = -\lambda_m^2 \cdot \overline{U_m(x)}, \qquad V_n''(y) = -\mu_n^2 \cdot \overline{V_n(y)}.$$

Здесь $\overline{U_m(x)}$ и $\overline{V_n(y)}$ – сопряженные соответственно $U_m(x)$ и $V_n(y)$ функции.

Придадим уравнению (6) вид уравнения Матье-Хилла:

$$w_{mn}'' + \Omega_{mn}^2 \left(1 - 2\mu \cos \theta t\right) w_{mn} = 0, \tag{8}$$

где $\Omega_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \left[1 - \frac{P_{10}}{P_{1mn}^*} - \frac{P_{20}}{P_{2mn}^*}\right], \quad \mu = \frac{P_{1t} \cdot P_{2mn}^* + P_{2t} \cdot P_{1mn}^*}{2 \cdot (P_{1mn}^* \cdot P_{2mn}^* - P_{10} \cdot P_{2mn}^* - P_{20} \cdot P_{1mn}^*)}, \qquad (9)$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{I_1}{I_0 \rho h}, \qquad P_{1mn}^* = \frac{I_1}{I_2}, \qquad P_{2mn}^* = \frac{I_1}{I_3}, \tag{10}$$

Ω_{mn} – частота собственных колебаний пластины, загруженной постоянными составляющими усилий, μ – коэффициент возбуждения, ω_{mn} – частота собственных колебаний незагруженной пластины, P_{1mn}^*, P_{2mn}^* – критические значения усилий $P_1(t)$ и $P_2(t)$.

Подстановкой интегралов (6) в выражения (10) получаем:

$$\begin{aligned}
\omega_{mn}^2 &= \frac{1}{\rho h}\left(D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda_m^2 \mu_n^2 \cdot A_{mn} + D_{22}\mu_n^4\right), \\
P_{1mn}^* &= \frac{B_{mn}}{\lambda_m^2}\left(D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda_m^2 \mu_n^2 \cdot A_{mn} + D_{22}\mu_n^4\right), \\
P_{2mn}^* &= \frac{C_{mn}}{\mu_n^2}\left(D_{11}\lambda_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda_m^2 \mu_n^2 \cdot A_{mn} + D_{22}\mu_n^4\right),
\end{aligned} \tag{11}$$

где A_{mn}, B_{mn} и C_{mn} имеют вид (13), то есть:

$$A_{mn} = \frac{\int_0^a \int_0^b \overline{U_m(x)} \cdot \overline{V_n(y)} \cdot U_m(x) \cdot V_n(y) dxdy}{\int_0^a \int_0^b U_m^2(x) \cdot V_n^2(y) dxdy},$$

$$B_{mn} = \frac{\int_0^a \int_0^b U_m^2(x) \cdot V_n^2(y) dxdy}{\int_0^a \int_0^b \overline{U_m(x)} \cdot U_m(x) \cdot V_n^2(y) dxdy}, \quad C_{mn} = \frac{\int_0^a \int_0^b U_m^2(x) \cdot V_n^2(y) dxdy}{\int_0^a \int_0^b U_m^2(x) \cdot \overline{V_n(y)} \cdot V_n(y) dxdy}. \tag{12}$$

Таким образом, решая задачу динамической устойчивости сжимаемой слоистой ортотропной пластины методом Бубнова-Галеркина приходим к уравнению Матье-Хилла (3.2.8), где параметры ω_{mn}, Ω_{mn}, μ, P_{1mn}^* и P_{2mn}^* определяем по формулам (9) и (3.2.11) соответственно, с применением в (12) соответствующих балочых функций, удовлетворяющих граничным условиям закрепления по краям пластины.

2. Рассмотрим сжимаемую однослойную ортотропную пластину, шарнирно опертую по краям $y = 0$, $y = b$ *и при различных граничных условиях на краях* $x = 0$, $x = a$.

Функцию прогиба (5) запишем в виде:

Таблица 1. Значения безразмерных параметров $\tilde{\omega}_{mn}$, $\tilde{\Omega}_{mn}$, $\tilde{P}_{mn}$

Граничные условия	**d=a/b**	$\max\limits_{\varphi}\min\limits_{m,n}\tilde{\omega}_{mn}$	$\max\limits_{\varphi}\min\limits_{m,n}\tilde{\Omega}_{mn}$	φ	$\max\limits_{\varphi}\min\limits_{m,n}\tilde{P}^{*}_{1mn}$	φ
1. 	**1/4**	$\tilde{\omega}_{11}=$ 16.45	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 12.74	0^0	$\tilde{P}_{11}=$ 16.91	0^0
	1/3	$\tilde{\omega}_{11}=$ 9.457	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 7.325	0^0	$\tilde{P}_{11}=$ 9.936	0^0
	1/2	$\tilde{\omega}_{11}=$ 4.482	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 3.472	0^0	$\tilde{P}_{11}=$ 5.022	0^0
	1	$\tilde{\omega}_{11}=$ 1.798	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 1.393	45^0	$\tilde{P}_{11}=$ 3.232	45^0
	2	$\tilde{\omega}_{11}=$ 1.120	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 0.868	80^0	$\tilde{P}_{21}=$ 3.232	45^0
	3	$\tilde{\omega}_{11}=$ 1.051	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 0.814	90^0	$\tilde{P}_{31}=$ 3.232	45^0
	4	$\tilde{\omega}_{11}=$ 1.028	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 0.796	90^0	$\tilde{P}_{41}=$ 3.232	45^0
2. 	**1/4**	$\tilde{\omega}_{11}=$ 25.33	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 19.62	0^0	$\tilde{P}_{11}=$ 34.38	0^0
	1/3	$\tilde{\omega}_{11}=$ 14.40	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 11.16	0^0	$\tilde{P}_{11}=$ 19.76	0^0
	1/2	$\tilde{\omega}_{11}=$ 6.613	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 5.122	0^0	$\tilde{P}_{11}=$ 9.370	0^0
	1	$\tilde{\omega}_{11}=$ 2.118	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 1.641	40^0	$\tilde{P}_{11}=$ 3.840	40^0
	2	$\tilde{\omega}_{11}=$ 1.164	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 0.902	70^0	$\tilde{P}_{21}=$ 3.477	45^0
	3	$\tilde{\omega}_{11}=$ 1.064	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 0.824	90^0	$\tilde{P}_{31}=$ 3.385	45^0
	4	$\tilde{\omega}_{11}=$ 1.034	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 0.801	90^0	$\tilde{P}_{41}=$ 3.342	45^0
3. 	**1/4**	$\tilde{\omega}_{11}=$ 36.25	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 28.08	0^0	$\tilde{P}_{11}=$ 66.36	0^0
	1/3	$\tilde{\omega}_{11}=$ 20.50	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 15.88	0^0	$\tilde{P}_{11}=$ 37.74	0^0
	1/2	$\tilde{\omega}_{11}=$ 9.269	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 7.180	0^0	$\tilde{P}_{11}=$ 17.36	0^0
	1	$\tilde{\omega}_{11}=$ 2.599	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 2.013	0^0	$\tilde{P}_{11}=$ 5.457	0^0
	2	$\tilde{\omega}_{11}=$ 1.215	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 0.941	70^0	$\tilde{P}_{21}=$ 3.846	40^0
	3	$\tilde{\omega}_{11}=$ 1.076	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 0.834	90^0	$\tilde{P}_{31}=$ 3.587	40^0
	4	$\tilde{\omega}_{11}=$ 1.039	$\tilde{\Omega}_{11}=$ 0.805	90^0	$\tilde{P}_{41}=$ 3.477	45^0

Примечание: а) шарнирно опертый край ; б) *защемленный край.*

$$w(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}U_m(x)\cdot\sin\mu_n y\cdot w_{mn}(t) \qquad (13)$$

Тогда выражения (11) для параметров ω_{mn}, P^{*}_{1mn} и P^{*}_{2mn} принимают вид:

$$\omega^2_{mn}=\frac{1}{\rho h}\left(D_{11}\lambda^4_m+2(D_{12}+2D_{66})\lambda^2_m\mu^2_n\cdot A_m+D_{22}\mu^4_n\right),$$

$$P^{*}_{1mn}=\frac{1}{\lambda^2_m\cdot A_{\text{мн}}}\left(D_{11}\lambda^4_m+2(D_{12}+2D_{66})\lambda^2_m\mu^2_n\cdot A_m+D_{22}\mu^4_n\right), \qquad (14)$$

$$P^{*}_{2mn}=\frac{1}{\mu^2_n}\left(D_{11}\lambda^4_m+2(D_{12}+2D_{66})\lambda^2_m\mu^2_n\cdot A_m+D_{22}\mu^4_n\right),$$

так как для рассматриваемого случая выражения (12) принимают вид:

$$A_m = \frac{\int_0^a \overline{U_m(x)} \cdot U_m(x) \cdot dx}{\int_0^a U_m^2(x) \cdot dx}, \qquad B_{mn} = \frac{1}{A_{mn}}, \qquad C_{mn} = 1. \tag{15}$$

В таблице 1 приведены результаты вычислений максимальных значений безразмерных величин параметров $\widetilde{P}_{mn}$, $\widetilde{\omega}_{mn}$, $\widetilde{\Omega}_{mn}$.

Как видно из таблицы 3.3 с увеличением соотнощения сторон пластины угол армирования φ для критической силы стремится к 45^0, а для частот $\widetilde{\omega}_{mn}$, $\widetilde{\Omega}_{mn}$ – к 90^0. По числам полувон минимальная частота получается при $m = n = 1$, а минимальная критическая сила для $\frac{1}{4} \le a/b \le 1$ при $m = n = 1$ и для $2 \le a/b \le 4$ при $n = 1$.

Список литературы: **1**. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988г. – 272 с. ISBN 5-217-00038-4. **2**. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448с. **3.** Васильев В.В., Хазиев А.Р. Оптимальное проектирование слоистых композитов. // Институт прикладной механики РАН. Механика композиционных материалов и конструкций. –Т.15, №1, 2009. –С. 3-16.**4.** Гнуни В.В. Проектирование сжатых осевой силой цилиндрических оболочек из композиционных материалов. НАН РА, Инст. Механики, изд-во “Гитутюн”, Ереван 2000г., 120 с. ISBN 5-8080-0448-9. **5**. Геворкян С.Х., Арустамян А.М. Динамическая устойчивость ортотропной пластины при различных граничных условиях. “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. V Международная конференция, Горис, 2005г. – С. 142 – 148. ISBN 5-8080-0625-2.

ON DYNAMIC STABILITY OF COMPRESSIBLE LAYERED ORTHOTROPIC PLATE JOINTLY SUPPORTED ON TWO SIDES AND WITH DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS ON THE OTHER TWO.

Arustamyan A.M. *(SEUA, Yerevan, Armenia)*
Tel / Fax. 374 (93) 25 25 83, E-mail: alla-arustamyan@rambler.ru

Abstract: *The problem of dynamic stability of layered orthotropic plate in case of jointly support on two sides and different boundary conditions on the other two is considered. Bubnov-Galerkin's method is applied for solution of this problem. The problem is reduced to the solution of the Mathieu-Hill's equation. The results of calculations of monolayer orthotropic plate are brought*

Key words: *dynamic stability, orthotropic plate, laminated plate, the angle of reinforcement, the critical force*

Надійшла до редколегії 01.07.2011 р.