УДК 621.833.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ ЧЕРВЯКА ОБЩЕГО ВИДА

Стрельников Ю. В. *(ВНУ им. В. Даля, г. Луганск, Украина)*
+38 (06272) 2-53-91; Факс: +38 (06264) 7-22-49; E-mail: rs@nkmz.donetsk.ua

Аннотация. *Получены выражения, определяющие основные критерии кривизны поверхности витка червяка общего вида, а также радиусы кривизны плоских сечений.*
Ключевые слова: *червяк, поверхность, координаты, сечение, кривизна, дифференциал.*

1. Введение

Червячная передача принципиально отличается от других передач зацеплением: расположением осей, геометрическими формами и кинематикой элементов зацепления, температурным режимом, применяемыми конструкционными и смазочными материалами. Большему износу подвержены зубья червячного колеса. Преимущественно возникает усталостное выкрашивание зубьев, реже – их поломка, т. к. зубья червячного колеса обладают сравнительно низкой контактной прочностью в отношении их прочностью на изгиб.

Червячные передачи при высоких нагрузках склонны к заклиниванию [1]. Невысокий к.п.д. и большое тепловыделение в зацеплении, существенно ограничивают использование червячных передач по уровню передаваемой мощности [2].

Решение задачи повышения нагрузочной способности и к.п.д. червячных передач привело к появлению более совершенных геометрических форм рабочих поверхностей с вогнутым червяком [3 – 5]. Другое положительное решение эта задача нашла в работе В. А. Попова [6].

Современные потребности тяжелого машиностроения вызывают необходимость более значительного повышения технических характеристик червячных передач.

2. Основное содержание и результаты работы

Рассмотрим поверхность, заданную уравнением между текущими координатами, т. е. геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению [7, 8]

$$F(x, y, z) = 0 . \qquad (1)$$

Ограничимся заведомо обыкновенными точками, такими, в которых, по крайней мере, одна из частных производных F_x, F_y, F_z отлична от нуля. Вблизи такой точки уравнение (1) можно переписать в виде, разрешенном относительно одной координаты, например [9, 10]

$$z = f(x, y), \qquad (2)$$

что дает ясное представление о поведении поверхности.

Представим вектор – функцию $\vec{r}$ двух скалярных аргументов u, v, рассматриваемых в некоторой области их изменения

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} , \qquad (3)$$

где x, y, z – координаты вектор – функции $\vec{r}$, они также являются функциями скалярных аргументов u, v.

Вектор $\vec{r}(u,v)$ откладывается из начала координат, конец этого вектора, который будем обозначать через *M*, имеет своим радиус – вектором

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \qquad (4)$$

и своими координатами

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v), \qquad z = z(u,v). \qquad (5)$$

Когда u, v проходят область своего изменения, точка M с радиус – вектором (4), или с координатами (5), описывает геометрическое место точек, определяющее некоторую поверхность в параметрическом представлении, т. е. каждой паре значений u, v из области их изменения отвечает точка поверхности. Поверхность будем рассматривать в бесконечно малом, вблизи какой – либо ее точки $M(u,v)$. Любая другая точка поверхности M' будет расположена в дифференциальной окрестности точки $M(u,v)$.

В теории поверхностей кривизна нормального сечения поверхности плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности, определяется отношением квадратичных форм Гаусса [11]: второй квадратичной формы *II* к первой *I*

$$\kappa = \frac{II}{I} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}, \tag{6}$$

где $E = E(u, v)$, $F = F(u, v)$, $G = G(u, v)$ – коэффициенты первой квадратичной формы; $L = L(u,v)$, $M = M(u,v)$, $N = N(u,v)$ – коэффициенты второй квадратичной формы.

Следуя Гауссу [11], определим

$$E = \vec{r}_u^{\,2} = 1 + f_x^2, \qquad F = \vec{r}_u \vec{r}_v = f_x f_y, \qquad G = \vec{r}_v^{\,2} = 1 + f_y^2, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{\vec{r}_{uu}\,\vec{r}_u\,\vec{r}_v}{\sqrt{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)^2}} = \frac{\vec{r}_{uu}\,\vec{r}_u\,\vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},\\ M &= \frac{\vec{r}_{uv}\,\vec{r}_u\,\vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},\\ N &= \frac{\vec{r}_{vv}\,\vec{r}_u\,\vec{r}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{r}_{uu}, \vec{r}_{uv}, \vec{r}_{vv}$ и $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ – частные производные вектор – функции $\vec{r}$ и функции $z = f(x,y)$ по соответствующим скалярным аргументам u, v и параметрам x, y [12].

Кривизна поверхности κ в точке M может быть положительной или отрицательной, в зависимости от знака второй квадратичной формы, первая квадратичная форма всегда положительна.

Возьмем плоскость, проходящую через орт нормали к поверхности $\vec{n} = \vec{n}(u,v)$ и через выбранное направление касательной. Эта плоскость пересечет поверхность по линии нормального сечения поверхности. Плоскость сечения будет соприкасающейся к плоскостью этой линии, главная нормаль последней $\vec{\nu}$ или совпадает с ортом нормали поверхности $\vec{n}$ $(\sigma = 0)$, или противоположна ей $(\sigma = \pi)$ [13].

Радиус кривизны нормального сечения поверхности R *положительный*, если главная нормаль сечения $\vec{\nu}$ совпадает с нормалью к поверхности $\vec{n}$, $(\sigma = 0, \quad r = R)$, и *отрицательный*, если главная нормаль сечения $\vec{\nu}$ противоположно направлена орту $\vec{n}$ $(\sigma = \pi, \quad -r = R)$. Здесь r представляет радиус кривизны линии нормального сечения поверхности, а σ – угол, образованный главной нормалью $\vec{\nu}$ линии нормального сечения поверхности с ортом нормали $\vec{n}$ к поверхности.

Полную картину распределения кривизны нормальных сечений поверхности в определенной точке *M* дает индикатриса Дюпена. Кривизна нормальных сечений поверхности в каждой точке (кроме омбилических) имеет два экстремальных значения. Направления, в которых кривизна нормального сечения поверхности в данной точке имеет минимум и максимум, совпадают с направлениями главных диаметров индикатрисы Дюпена и, следовательно, они взаимно перпендикулярны. Эти направления представляют *главные направления* на поверхности в точке *M*. Нормальные сечения поверхности (L_1) и (L_2), проведенные в главных направлениях, являются главными сечениями поверхности. Кривизны $\kappa_1 = \frac{1}{R_1}$, $\kappa_2 = \frac{1}{R_2}$ главных сечений называются главными кривизнами поверхности в точке *M*.

Радиус кривизны $R = \frac{1}{\kappa}$ произвольного нормального сечения поверхности (L) выражается через главные радиусы кривизны R_1 и R_2 формулой Эйлера

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}, \tag{9}$$

где φ – угол между плоскостями нормальных сечений (L) и (L_1).

Частные производные функции $z = f(x, y)$ по параметрам x, y в уравнениях (7) и (8) получим дифференцированием уравнения винтовой поверхности червяка

$$\left.\begin{aligned}
f_x &= \frac{\partial z}{\partial x} = p\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta(x,y)}{\partial x},\\
f_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = p\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta(x,y)}{\partial y},\\
f_{xx} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = p\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta(x,y)}{\partial x^2},\\
f_{xy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = p\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \zeta(x,y)}{\partial x\,\partial y},\\
f_{yy} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = p\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta(x,y)}{\partial y^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Частные производные угла ϑ по параметрам x, y установим с помощью формул [14]

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \vartheta}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2+y^2},\\
\frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= \frac{x}{x^2+y^2},\\
\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} &= \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\\
\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x\,\partial y} &= \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},\\
\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} &= -\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Подставляя значения частных производных (10) и (11) в уравнения (7) и (8), получим коэффициенты первой и второй квадратичной форм Гаусса для поверхности червяка общего вида

$$\left.\begin{aligned} E &= 1+\left[-p\,\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta(x,y)}{\partial x}\right]^2,\\ F &= \left[-p\,\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta(x,y)}{\partial x}\right]\left[p\,\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta(x,y)}{\partial y}\right],\\ G &= 1+\left[p\,\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta(x,y)}{\partial y}\right]^2, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{p\,\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\dfrac{\partial^2\zeta(x,y)}{\partial x^2}}{\sqrt{1+\left(-p\,\dfrac{y}{x^2+y^2}+\dfrac{\partial\zeta(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(p\,\dfrac{x}{x^2+y^2}+\dfrac{\partial\zeta(x,y)}{\partial y}\right)^2}},\\ M &= \frac{p\,\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\dfrac{\partial^2\zeta(x,y)}{\partial x\,\partial y}}{\sqrt{1+\left(-p\,\dfrac{y}{x^2+y^2}+\dfrac{\partial\zeta(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(p\,\dfrac{x}{x^2+y^2}+\dfrac{\partial\zeta(x,y)}{\partial y}\right)^2}},\\ N &= \frac{-p\,\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\dfrac{\partial^2\zeta(x,y)}{\partial y^2}}{\sqrt{1+\left(-p\,\dfrac{y}{x^2+y^2}+\dfrac{\partial\zeta(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(p\,\dfrac{x}{x^2+y^2}+\dfrac{\partial\zeta(x,y)}{\partial y}\right)^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

В точке M на поверхности F зададим два различных направления: дифференциалы, отвечающие одному из них, обозначим $du,\ dv$; дифференциалы, отвечающие другому, пусть будут $\delta u,\ \delta v$. Запишем орты $d\vec{r}$ и $\delta\vec{r}$, соответствующие этим направлениям

$$d\vec{r}=\frac{\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}}, \tag{14}$$

$$\delta\vec{r}=\frac{\vec{r}_u\delta u+\vec{r}_v\delta v}{\sqrt{E\,\delta u^2+2F\,\delta u\,dv+G\,\delta v^2}}. \tag{15}$$

Из уравнений (14), (15) найдем угол между направлениями $\dfrac{du}{dv}$ и $\dfrac{\delta u}{\delta v}$

$$\cos\left(d\vec{r},\delta\vec{r}\right)=\frac{E\,du\,\delta u+F\left(du\,\delta v+dv\,\delta u\right)+G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}\cdot\sqrt{E\,\delta u^2+2F\,\delta u\,dv+G\,\delta v^2}}. \tag{16}$$

Угол φ между координатными линиями в некоторой точке $M(x,\ y)$ на поверхности витка червяка

$$\left.\begin{aligned} cos\varphi &= \frac{\left[-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta(x,y)}{\partial x}\right]\left[\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta(x,y)}{\partial y}\right]}{\sqrt{\left\{1+\left[-p\,\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta(x,y)}{\partial x}\right]^2\right\}\left\{1+\left[p\,\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta(x,y)}{\partial y}\right]^2\right\}}},\\ sin\varphi &= \frac{\sqrt{\left\{1+\left[-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta(x,y)}{\partial x}\right]^2\right\}+\left[\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta(x,y)}{\partial y}\right]^2}}{\sqrt{\left\{1+\left[-p\,\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta(x,y)}{\partial x}\right]^2\right\}\left\{1+\left[p\,\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta(x,y)}{\partial y}\right]^2\right\}}}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где: $dy \neq 0, \quad dx = 0 \quad \Rightarrow$ смещение по линии y;
$dx \neq 0, \quad dy = 0 \quad \Rightarrow$ смещение по линии x.

Кривизна нормального сечения поверхности в общем случае зависит от выбранного направления $dy : dx$, кроме омбилических точек. В главном направлении величина κ должна иметь экстремальное значение.

При бесконечно малом смещении из точки $M(u,v)$ по поверхности $\vec{r}(u,v)$, сам радиус – вектор $\vec{r}(u,v)$ и орт нормали $\vec{n}(u,v)$ получат приращения, главные части которых выражаются дифференциалами [13]

$$\left.\begin{aligned} d\,\vec{r} &= \vec{r}_u\,d\,u + \vec{r}_v\,d\,v,\\ d\vec{n} &= \vec{n}_u\,du + \vec{n}_v\,dv. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Оба дифференциала $d\vec{n}$ и $d\,\vec{r}$ лежат в касательной плоскости точки M'. Если бесконечно малое смещение осуществляется в главном направлении, то векторы $d\vec{n}$ и $d\,\vec{r}$ коллинеарны и имеет место формула Родрига [12], выражающая необходимое и достаточное условие существования главных направлений и главных кривизн в рассматриваемой точке поверхности

$$d\,\vec{r} + R\,d\,\vec{n} = 0, \tag{19}$$

где $d\,\vec{r}$ – идет по любому из главных направлений на поверхности;
R – главный радиус кривизны по соответствующему главному направлению.

В равенство (19) подставим развернутые выражения слагаемых и после преобразований получим квадратное уравнение относительно $dy : dx$, решая его, определим два вещественных различных корня, отвечающих двум взаимно ортогональным бесконечно малым смещениям по главным направлениям в каждой точке поверхности червяка общего вида

$$\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)_{1,2} = \frac{-\left\{\left[\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]\left[1+\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]-\left[-\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\times\right.}{2\left\{\left[\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)-\right.}$$

$$\times\left[1+\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\right]\Bigg\}\pm\sqrt{\left\{\left[\frac{2p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]\left[1+\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]-\right.}$$

$$-\left[\frac{p\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right]\left[1+\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\right]\Bigg\}$$

$$-\left[-\frac{2p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\left[1+\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\right]\Bigg\}^2-4\left\{\left[\frac{2p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]\times\right.$$

$$\times\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)-\left[\frac{p\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right]\times$$

$$\times\left[1+\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\right]\Bigg\}\left\{\left[\frac{p\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right]\left[1+\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]-\right.$$

$$-\left[-\frac{2p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\Bigg\}. \qquad (20)$$

С алгебраической точки зрения причина вещественности и неравенства корней лежит в том, что выбор коэффициентов первой и второй квадратичных форм $E,\ F,\ G,\ L,\ M,\ N$ не вполне произволен, т. к. корень квадратный из дискриминанта первой квадратичной формы (функции криволинейных координат $u,\ v$) всегда должен быть положителен $\sqrt{EG-F^2}\ >\ 0.$

Главные радиусы кривизны R_1 и R_2 можно найти путем определения максимума и минимума кривизны (6) нормального сечения поверхности, или из векторного равенства (19) аналогично (20). Независимой переменной служит касательная, указывающая выбранное направление в касательной плоскости в точке M поверхности витка червяка общего вида, т. е. $dy : dx$

$$R_{1,2}=\Bigg\langle-\left\{2\left[\frac{p\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right]\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)-\right.$$

$$-\left[1+\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\right]\left[-\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]-\left[\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]\times$$

$$\times\left[1+\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]\Bigg\}\pm\sqrt{\left\{2\left[\frac{p\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right]\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\times\right.}$$

$$\times\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)-\left[1+\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\right]\left[-\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]-$$

$$-\left[\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]\left[1+\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]\Bigg\}^2-4\left\{\left\{\left[1+\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\right]\times\right.\right.$$

$$\times\left[1+\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]-\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\Bigg]\Bigg\}\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]\left[-\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]-\left[\frac{p\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right]^2\right\}\Bigg\}\Bigg\rangle\times \tag{21}$$

$$\times\left\{2\left\{\left[\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]\left[-\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]-\left[\frac{p\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right]^2\right\}\right\}^{-1}\times$$

$$\times\sqrt{1+\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2}\,.$$

Средняя кривизна поверхности витка червяка общего вида H равна полусумме главных кривизн в данной точке поверхности

$$H=\frac{\left[1+\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]\left[\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]-2\left\{\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\left[\frac{p\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right]\right\}+\left[1+\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\right]\left[-\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]}{2\left[1+\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]^{3/2}}. \tag{22}$$

Гауссова кривизна поверхности витка червяка общего вида K определяется произведением главных кривизн в данной точке поверхности. Гауссову кривизну бывает удобнее определять в виде отношения дискриминантов второй и первой квадратичных форм поверхности

$$K=\frac{\left[\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]\left[-\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]-\left[\frac{p\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right]}{2\left[1+\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]^2}. \tag{23}$$

Определим радиусы кривизны для плоских сечений, параллельных координатным плоскостям, в некоторой точке M поверхности витка червяка общего вида:

– секущая плоскость $x=const$

$$R_x=\frac{\sqrt{\left[1+\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]^3}}{-\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}}, \tag{24}$$

– секущая плоскость $y=const$

$$R_y=\frac{\sqrt{\left[1+\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\right]^3}}{\left[\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]}, \tag{25}$$

– секущая плоскость $z = const$

$$R_z = \frac{\sqrt{\left[\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\right]^3}}{\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)^2\left[\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]-2\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\left(\frac{p\,x}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\times} \qquad (26)$$

$$\overline{\times\left[\frac{p\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\right]+\left(-\frac{p\,y}{x^2+y^2}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\left[-\frac{2\,p\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right]}.$$

3. Заключение

1. Через квадратичные формы Гаусса определена кривизна произвольного нормального сечения поверхности витка червяка общего вида.

2. По формуле Родрига получены главные направления поверхности витка червяка.

3. С помощью полученных значений главных направлений, определены главные радиусы кривизны поверхности витка червяка.

4. Установлены средняя и гауссова кривизны поверхности витка червяка.

5. Определены радиусы кривизны для плоских сечений поверхности витка червяка, параллельных координатным плоскостям, секущие плоскости: $x = const$, $y = const$, $z = const$.

6. Полученные результаты планируется использовать при разработке высоконагруженных червячных передач применительно к тяжелому машиностроению.

Список литературы: 1. Кудрявцев В. Н. Червячные передачи. – ЛКВВИА, 1954. **2.** Грубин А. Н., Лихциер М. Б. Повышение пределов грузоподъемности и скорости червячных пар с червячными колесами из заменителей оловянистой бронзы // Передачи в машиностроении. – М.: Машгиз, 1951. – С. 309 – 321. **3.** Литвин Ф. Л. Способ шлифования и геометрии поверхности витков цилиндрических червяков с вогнутым профилем // Механика и машиностроение. – Известия Академии Наук СССР ОТН. – М. – 1961. - № 4. – С. 154 – 161. **4.** Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: изд – во «Наука», 1968. – 584 с. **5.** Кривенко И. С. Новые типы червячных передач на судах. – Л.: изд – во Судостроение, 1967. – 256 с. **6.** Попов В. А. Цилиндрические червячные передачи с повышенными эксплуатационными свойствами. // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2010. – № 3. – С. 105 – 110. **7.** Грубин А. Н. Червячное зацепление. – М.: Оргметалл. – 1936. – 190 с. **8.** Люкшин В. С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов. – М.: Машиностроение, 1968. – 371 с. **9.** Волков Ю. А., Лифшиц Г. А. Некоторые геометрические задачи теории зубчатых передач // Вестник ЛГУ. – 1971. – № 7. – С. 67 – 76. **10.** Волков Ю. А., Лифшиц Г. А. Некоторые геометрические задачи теории зубчатых передач // Вестник ЛГУ. – 1971. – № 13. – С. 101 – 105. **11.**Фиников С. П. Теория поверхностей. – М. – Л.: ГТТИ, 1934. – 204 с. **12.** Выгодский М. Я. Дифференциальная геометрия. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1949. – 511 с. **13.** Бюшгенс С. С. Дифференциальная геометрия. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1940. – 300 с. **14.** Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1950. – 428 с.

ВИЗНАЧЕННЯ КРИВИЗНИ ПОВЕРХНІ ЧЕРВ’ЯКА ЗАГАЛЬНОГО ВИДУ

Стрельніков Ю. В. *(СНУ ім. В. Даля, м. Луганськ, Україна)*

Анотація. *Отримано вираження, що визначають основні критерії кривизни поверхні витка черв’яка загального виду, а також радіуси кривизни плоских перетинів.*

Ключові слова: *черв'як, поверхня, координати, перетин, кривизна, диференціал.*

DEFINITION OF CURVATURE OF THE GENERAL VIEW WORM SURFACE

Strelnikov Y. V. *(East Ukrainian National University, Ukraine)*

The Abstract. *Expressions, defining basic criteria of a surface curvature of a general view worm thread, and radiuses of curvature in plane sections is obtained.*

Keywords: *worm, surface, coordinates, cross-section, curvature, differential.*

Надійшла до редколегії 18.01.2011.

УДК 544.344:664

ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В РАБОЧЕЙ КАМЕРЕ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ФЛЮИДОВ

Сукманов В.А.[1], Русанова О.А.[2], Петрова Ю.Н.[1], Лаговский И.А.[1] *([1]ДонНУЭТ, [2]ДонНУ, Донецк, Украина)*

E-mail: ksenia_U@ukr.net, yunic@ukr.net

Аннотация. *В статье разработана методика расчета рабочей камеры для получения флюидной воды в программе ANSYS, проведена верификация полученной модели по формулам Ляме. Получены температурные напряжения в рабочей камере в процессе нагревания.*

Ключевые слова: *флюидная вода, рабочая камера, толстостенный цилиндр, расчетная модель, ANSYS, температурные напряжения.*

1. Введение. Обеспечение конкурентоспособности изготовленных в Украине пищевых продуктов на внутреннем и внешнем рынке связано с необходимостью проведения революционных преобразований пищевой и перерабатывающей промышленности и связанных с ней производств с целью получения продуктов с прогнозируемыми свойствами, достижения безопасности деятельности заводов для окружающей среды, миниатюризации, адаптируемости, энергетической эффективности производства.

Традиционные методы решения этих вопросов (стерилизация и пастеризация) практически исчерпали свои возможности в связи с понижением пищевой ценности продукта, а также в связи с высокой энергоемкостью производства. Сверхкритические флюидные технологии (СФТ) в значительной степени отвечают этому вызову времени, но эти технологии сверхкритических сред развивается довольно медленно, только к концу XIX века вышел первый обзор на эту тему [1]. Со второй половины XX века учёные стали всерьёз задумываться об экологической безопасности и повышении эффективности пищевых производств и потому заинтересовались веществами в сверхкритическом состоянии [2-4]. И если лет тридцать назад об экологически чистом производстве на основе сверхкритических флюидов рассуждали на языке теории, то сегодня на Западе эта область химической технологии активно развивается [5-6]. Темпы роста промышленной экстракционной СКФ-технологии в мире составляют не менее 10% в год. Особенно интенсивно этот процесс идет в Китае, Индии, США, Германии, Японии, Италии.

Исследования данной проблематики в контексте повышенной потребности в экологически чистых продуктах с заданными свойствами требует дальнейшего развития. Для технологических процессов чаще всего используют диоксид углерода во флюидном состоянии — именно его сегодня применяют для экстракции и разделения веществ. Сверхкритическую воду пока используют значительно реже, поскольку она становится