

Стрельников В.Н., Суков Г.С., Волошин А.И., Суков М.Г.

(ЗАО "НКМЗ, г. Краматорск, Украина)

+38 (06272) 2-53-91; Факс: +38 (06264) 7-22-49; E-mail: rs@nkmz.donetsk.ua

Аннотация. Изложены результаты синтеза червячной передачи общего вида по произвольно заданному осевому сечению профиля червяка. Предложена математическая модель, предполагающая повышение нагрузочной способности червячной передачи.

Ключевые слова: червяк, колесо, зацепление, контакт, профиль, уравнение.

1. Введение

Червячное зацепление, среди других высших кинематических пар, обеспечивает наиболее высокий технический результат передачи вращения между перекрещивающимися осями. Однако, несмотря на это, червячная передача обладает рядом существенных недостатков, основной из которых связан с высокими энергетическими потерями в зацеплении, и как результат – низкий к.п.д., а также ограниченная нагрузочная способность по причине склонности к заеданию, малой контактной прочности зубьев червячного колеса, выделения в зацеплении большого количества тепловой энергии.

Предложенная Г. Ниманном червячная передача с вогнутым профилем червяка (сечение поверхности инструмента плоскостью, проходящей через ось червяка - дуга окружности) [1] значительно превзошла все другие цилиндрические червячные передачи по основным эксплуатационным показателям: к.п.д., нагрузочной способности, ресурсу работы, допускаемому диапазону скоростей скольжения в зацеплении.

Компьютерное моделирование процесса передачи крутящего момента зацеплением расширяет возможности повышения его технических характеристик. В этом смысле представляет значительный практический интерес связь виртуальных моделей червячного зацепления с современным процессом нарезания витков червяка и зубьев червячного колеса на многокоординатных обрабатывающих центрах.

Основы общей аналитической теории зацеплений заложены Х. И. Гохманом [2]. Методика Х. И. Гохмана упростила способ получения сопряженных поверхностей, как с линейчатым, так и с точечным контактом. Она позволяет не только исследовать любые виды зацеплений, но и по заданному движению инструментальной поверхности устанавливать вид и параметры полученного зацепления, изменять его характеристики.

Дальнейшее развитие и практическую интерпретацию теория Х. И. Гохмана получила в трудах Н. И. Колчина [3], Ф. Л. Литвина [4], Ю. Ф. Морошкина [5], Н. Н. Крылова [6], Я. С. Давыдова [7], В. А. Шишков [8], О. Саари [9] и др. Последующие исследования в области зубчатых зацеплений, основанные на аналитической теории Х. И. Гохмана, вылились в самостоятельные научные направления, наиболее заметное из которых представляет кинематический метод анализа зубчатых зацеплений [7], [8], [4].

2. Основное содержание и результаты работы

В основном применяются ортогональные червячной передачи, с постоянным

передаточным отношением i_{21} , т. е. $i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = const$, где ω_1, ω_2 – соответствующие

угловые скорости червяка и червячного колеса. Углы поворота червяка φ_1 и червячного колеса φ_2 связаны между собой условием постоянства заданного передаточного отношения так же, как и их угловые скорости ω_1 и ω_2 .

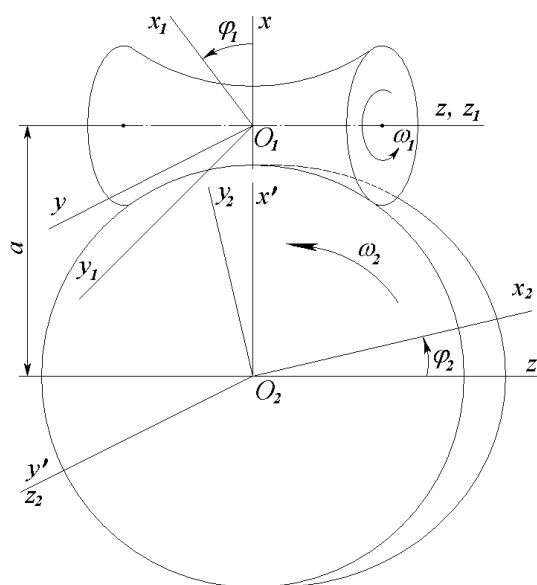


Рис. 1. Расчетная модель к аналитическому отображению геометрии червячной пары

Нам неизвестны случаи применения в тяжелом машиностроении червячных передач с углом скрещивания осей отличным от угла 90° . Поэтому в дальнейшем предполагается рассмотрение червячного зацепления с ортогональным скрещиванием осей червяка и червячного колеса ($\gamma = 90^\circ$).

Для исследования зацепления червячной передачи будем использовать декартовы системы координаты правого направления: x, y, z – неподвижная система координат, x_1, y_1, z_1 – подвижная система координат, жестко связанная с червяком, x_2, y_2, z_2 – подвижная система координат, жестко связанная с червячным колесом (рис. 1). Оси z и z_1 направлены вдоль оси червяка, а ось z_2 – вдоль оси червячного колеса.

Введем также вспомогательную неподвижную систему координат, x', y', z' , которую можно получить путем поступательного перемещения системы координат x, y, z вдоль оси x на величину межосевого расстояния $-a$.

Связи между различными системами координат устанавливаются методами аналитической геометрии [10] и в то же время они служат одним из основных методов в теории синтеза и анализа пространственных зацеплений.

Координаты некоторой точки в различных системах отсчета, например x, y, z и x_1, y_1, z_1 обладают аналитической связью

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1, \\ y &= x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1, \\ z &= z_1, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1, \\ y_1 &= -x \sin \varphi_1 + y \cos \varphi_1, \\ z_1 &= z. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Установим связь между системами координат x, y, z и x_2, y_2, z_2

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (x+a)\sin\varphi_2 + z\cos\varphi_2, \\ y_2 &= (x+a)\cos\varphi_2 - z\sin\varphi_2, \\ z_2 &= y, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= x_2\sin\varphi_2 + y_2\cos\varphi_2 - a, \\ y &= z_2, \\ z &= x_2\cos\varphi_2 - y_2\sin\varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Для представления координатных функций x_2, y_2, z_2 (3) с помощью x_1, y_1, z_1 , воспользуемся системой (1)

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= (x_1\cos\varphi_1 - y_1\sin\varphi_1 + a)\sin\varphi_2 + z_1\cos\varphi_2, \\ y_2 &= (x_1\cos\varphi_1 - y_1\sin\varphi_1 + a)\cos\varphi_2 - z_1\sin\varphi_2, \\ z_2 &= x_1\sin\varphi_1 + y_1\cos\varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Обратный переход от системы отсчета x_2, y_2, z_2 к осям x_1, y_1, z_1 осуществим с помощью выражений (2) и (4)

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (x_2\sin\varphi_2 + y_2\cos\varphi_2 - a)\cos\varphi_1 + z_2\sin\varphi_1, \\ y_1 &= -(x_2\sin\varphi_2 + y_2\cos\varphi_2 - a)\sin\varphi_1 + z_2\cos\varphi_1, \\ z_1 &= x_2\cos\varphi_2 - y_2\sin\varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В выражениях (6) значения x_1, y_1, z_1 являются координатными функциями аргументов x_2, y_2, z_2 , а для координатных функций x_2, y_2, z_2 в системе уравнений (5) в качестве аргументов служат координаты x_1, y_1, z_1 . Указанные обстоятельства позволяют заключить, что дифференциалы dx_1, dy_1, dz_1 представляют приращения координатных функций x_1, y_1, z_1 , вызванные элементарным перемещением соответствующей точки поверхности зуба червячного колеса, при повороте червяка на угол $d\varphi_1$.

Дифференциалы dx_2, dy_2, dz_2 выражают приращения координатных функций x_2, y_2, z_2 , вызванные элементарным перемещением соответствующей точки червяка, при повороте последнего на угол $d\varphi_1$. Определим частные производные $\frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1}$ и $\frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial z_2}{\partial \varphi_1}$.

Воспользуемся уравнениями (6)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} &= x_2(i_{21} \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 - \sin \varphi_2 \sin \varphi_1) - \\ &\quad - y_2(i_{21} \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1) + z_2 \cos \varphi_1 + a \sin \varphi_1, \\ \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} &= -x_2(i_{21} \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1) + \\ &\quad + y_2(i_{21} \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_2 \cos \varphi_1) - z_2 \sin \varphi_1 + a \cos \varphi_1, \\ \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} &= -i_{21} x_2 \sin \varphi_2 - i_{21} y_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В уравнениях (7) заменим x_2, y_2, z_2 их значениями по формулам (5)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} &= y_1 + i_{21} z_1 \cos \varphi_1, \\ \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} &= -x_1 - i_{21} z_1 \sin \varphi_1, \\ \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} &= -i_{21}(x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1 + a). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

После дифференцирования уравнений (5) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} &= x_1(i_{21} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) - \\ &\quad - y_1(i_{21} \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) - z_1 i_{21} \sin \varphi_2 + i_{21} a \cos \varphi_2, \\ \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} &= -x_1(i_{21} \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) + \\ &\quad + y_1(i_{21} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2) - i_{21} z_1 \cos \varphi_2 - i_{21} a \sin \varphi_2, \\ \frac{\partial z_2}{\partial \varphi_1} &= x_1 \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

В уравнениях (9) выполним замену x_1, y_1, z_1 их значениями по формулам (6)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial \varphi_1} &= i_{21} y_2 - z_2 \sin \varphi_2, \\ \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} &= -i_{21} x_2 - z_2 \cos \varphi_2, \\ \frac{\partial z_2}{\partial \varphi_1} &= x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2 - a. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

В тяжелом машиностроении преобладают единичное и мелкосерийное производства с широкой номенклатурой выпускаемых изделий. В этих условиях наиболее высокая эффективность производственных процессов достигается за счет освоения передовых технологий, основанных на компьютерном проектировании технологий с последующей адаптацией программного продукта к рабочей программе обрабатывающего центра.

Например, при нарезке червяков и зубьев червячных колес на универсальных многокоординатных обрабатывающих центрах, может быть исключена трудоемкая дорогостоящая технологическая операция шлифования червяка, а также не требуется изготовление специальной глобоидно – червячной фрезы для нарезки червячного колеса традиционным способом. При этом издержки на производство глобоидно – червячной фрезы зачастую превышают затраты на изготовление червячной пары.

Руководствуясь технологическими особенностями нарезки червяков на обрабатывающих центрах, поверхность червяка общего вида зададим с помощью некоторой гладкой плоской кривой линии AOB , совпадающей с осевым сечением поверхности червяка (рис. 2). Система координат x_I, y_I, z_I жестко связана с заготовкой червяка.

Для построения осевого профиля червяка выбирается подвижная система координат ξ, η, ζ , совершающая винтовое движение относительно оси z_I , совпадающей с осью заготовки. Начало координат O системы ξ, η, ζ расположено на стыке правой OA и левой OB частей образующей граней витка червяка, на некотором цилиндре, радиус которого равен ρ . Ось ζ

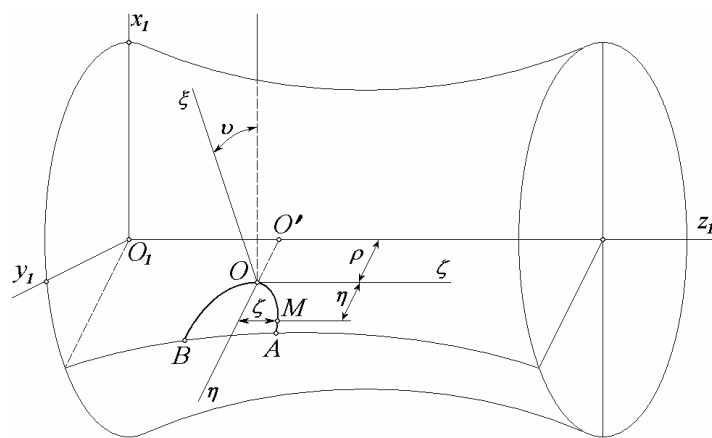


Рис. 2. Модель формообразования поверхности червяка произвольного профиля

параллельна оси z_I и совпадает с образующей указанного цилиндра. Образующая кривая AOB лежит в координатной плоскости η, ζ .

В процессе вывода основных уравнений определяющих элементы червячного зацепления и характеризующих условия их сопряжения, использовались основы аналитической теории зацепления, разработанной Х. И. Гохманом, и метод преобразования координат,

отражающих кинематику формообразования активных поверхностей червячной пары в процессе их взаимоогибания.

В начальный момент ($v=0$), оси ξ и η соответственно параллельны осям x_I и y_I . При повороте системы координат ξ, η, ζ на некоторый угол v , кривая AOB переместится вдоль оси z_I на расстояние $O_I O' = p v$, где $p = \frac{t}{2\pi}$ – параметр винтовой поверхности (линии); t – шаг винтовой поверхности (линии). Определим угол подъема

λ винтовой линии, описываемой началом координат ξ, η, ζ , точкой O :
$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{p}{\rho}.$$

Выразим координаты ξ, η, ζ через x_I, y_I, z_I

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x_I \cos v + y_I \sin v, \\ \eta &= -x_I \sin v + y_I \cos v - \rho, \\ \zeta &= z_I - p v. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Координаты x_I, y_I, z_I представим через ξ, η, ς

$$\left. \begin{aligned} x_I &= \xi \cos \nu - (\eta + \rho) \sin \nu, \\ y_I &= \xi \sin \nu + (\eta + \rho) \cos \nu, \\ z_I &= p\nu + \varsigma. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Если в уравнении (12) положить $\xi = 0$, что соответствует рис. 2, то получим параметрическое уравнение боковой поверхности червяка общего вида, заданного с помощью некоторой гладкой плоской кривой линии AOB , совпадающей с осевым сечением поверхности червяка.

В уравнения (1) подставим значения координатных функций x_I, y_I, z_I из системы (12), получим

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \cos(\nu + \varphi_I) - (\eta + \rho) \sin(\nu + \varphi_I), \\ y &= \xi \sin(\nu + \varphi_I) + (\eta + \rho) \cos(\nu + \varphi_I), \\ z &= p(\nu + \varphi_I) + \varsigma - p\varphi_I. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Учитывая, что образующая AOB лежит в плоскости η, ς (рис. 2), можно записать ее уравнения в системе координат ξ, η, ς

$$\varsigma = \varsigma(\eta), \quad \xi = 0. \quad (14)$$

Подставляя значения (14) в уравнения (13), получим уравнения боковой поверхности червяка произвольного профиля в неподвижной системе координат

$$\left. \begin{aligned} x &= -(\eta + \rho) \sin(\nu + \varphi_I), \\ y &= (\eta + \rho) \cos(\nu + \varphi_I), \\ z &= p(\nu + \varphi_I) + \varsigma(\eta) - p\varphi_I. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Исключив параметры η и ν из уравнений (15), получим уравнение винтовой поверхности червяка произвольного профиля в координатной форме

$$z = p \left(\pi - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \varsigma(\eta) - p\varphi_I, \quad (16)$$

или, аналогично уравнению (16)

$$z = p \left(\pi + \arccos \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \varsigma(\eta) - p\varphi_I, \quad (17)$$

где $\eta = \sqrt{x^2 + y^2} - \rho$.

Образующая кривая линии AOB задана в плоскости осевого сечения червяка

η, ς . Поэтому, если во втором уравнении системы (15) задать $y = 0$, то получим параметрические уравнения

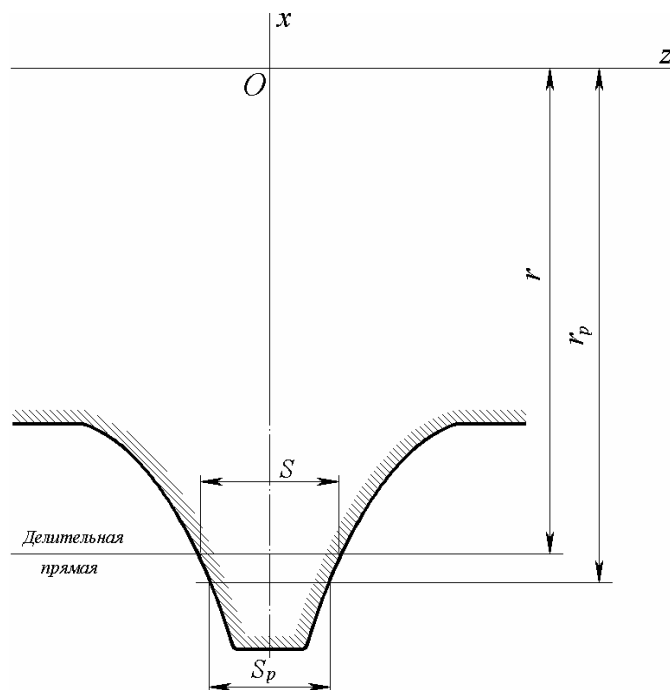


Рис. 3. Контур осевого сечения червяка:

r, r_p — радиусы делительного и начального цилиндров;
 S, S_p — осевая толщина витка червяка на делительном и начальном цилиндрах

профиля осевого сечения червяка (рис. 3)

$$\left. \begin{aligned} x &= -(\eta + \rho) \sin(\nu + \varphi_I), \\ z &= p(\nu + \varphi_I) + \zeta(\eta) + z_0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Для осевого сечения червяка (рис. 3): $x = -r$, $z = \frac{S}{2}$, в соответствии с системой уравнений (18), определим значение z_0

$$z_0 = \frac{S}{2} - \frac{3}{2} \pi p - \zeta_S(\eta), \quad (19)$$

где $\zeta_S(\eta)$ – значение функции $\zeta(\eta)$, соответствующее $\eta = r - \rho$.

Если на равенство (16) наложить условие $y = 0$, то получим уравнение осевого сечения червяка в координатной форме

$$z = \frac{3}{2} \pi p + \zeta(\eta) + z_0. \quad (20)$$

Торцевое сечение червяка можно определить из системы уравнений (15), приравняв нулю третье равенство ($z = 0$)

$$p(\nu + \varphi_I) + \zeta(\eta) - p\varphi_I = 0, \\ (\nu + \varphi_I)_{(z=0)}$$

из которого получим величину суммарного угла

$$(\nu + \varphi_I)_{(z=0)} = -\frac{1}{p} [\zeta(\eta) - p\varphi_I] \quad (21)$$

Учитывая условие (21), получим уравнения торцевого сечения червяка произвольного профиля

$$\left. \begin{aligned} x &= -(\eta + \rho) \sin(\nu + \varphi_I)_{(z=0)}, \\ y &= (\eta + \rho) \cos(\nu + \varphi_I)_{(z=0)}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

3. Заключение

Разработана математическая модель синтеза червячной передачи общего вида, обеспечивающая возможности оптимизации ее основных технических характеристик. Полученные уравнения соответствуют винтовой поверхности с правой нарезкой. При левой нарезке следует изменить знак параметра винтовой поверхности, заменить положительное значение P отрицательным $-P$. При соблюдении условия $\zeta(\eta) \leq 0$ уравнения определяют правую грань витка, а при $\zeta(\eta) \geq 0$ – левую грань витка червяка.

Следует отметить, что в процессе компьютерного построения математических моделей, программный продукт предусматривает получение любых сечений виртуальных объектов, построение их различных отображений, в т. ч. и симметричных. Эти обстоятельства позволяют не заострять внимание на детальном описании получения симметричных геометрических образов элементов исследуемого червячного зацепления.

Список литературы: 1. Niemann G., Heyer E. Untersuchungen an Schneckengetrieben – «VDI», 1953, № 6, с. 147 – 157. 2. Гохман Х. И. Теория зацеплений, обобщенная и развитая путем анализа.-Одесса.-1886.-232 с. 3. Колчин Н. И. Аналитический расчет плоских и пространственных зацеплений. – М. – Л.: Машгиз,

1949. – 210 с. 4. Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: изд – во «Наука», 1968. – 584 с. 5. Морошкин Ю. Ф. Основы аналитической теории механизмов, «Труды семинара по теории машин и механизмов», вып. 54. – М.: изд – во АН СССР, 1954. 6. Крылов Н. Н. Геометрия контакта сопряженных поверхностей, образованных двумя линиями // Теория передач в машинах. – М.: Машиностроение. – 1966. – С. 49 – 60. 7. Давыдов Я. С. Образование сопряженных поверхностей в зубчатых передачах с помощью двух кривых линий // Анализ и синтез механизмов и теория передач. – М.: изд-во «Наука», 1965. 8. Шишков В. А. Элементы кинематики образования и зацепления зубчатых передач // Теория и расчет зубчатых передач. ЛОНИТОМАШ, кн. 6. – М. – Л.: Машгиз, 1948. 9. Saary O. The Mathematical Background of Spiroid Gears, «Industr. Math.», № 7, 1956. 10. Мусхелишвили Н. И. Курс аналитической геометрии. – М.: изд – во «Высшая школа», 1967.

СИНТЕЗ ЧЕРВ'ЯЧНОЇ ПЕРЕДАЧІ ЗАГАЛЬНОГО ВИДУ

Стрельников В.М., Суков Г.С., Волошин А.И., Суков М.Г.

(ЗАТ "НКМЗ", м. Краматорськ, Україна)

Анотація. Викладено результати синтезу черв'ячної передачі загального виду по довільно заданому осьовому перерізу профілю черв'яка. Запропоновано математичну модель, що припускає підвищення навантажувальної здатності черв'ячної передачі.

Ключові слова: черв'як, колесо, зацеплення, контакт, профіль, рівняння.

WORM GEARING OF THE GENERAL VIEW SYNTHESIS

Strelnikov V.N., Sukov G.S., Voloshin A.I., Sukov M.G. (Joint-Stock Company "NKMZ", Kramatorsk, Ukraine)

The Abstract. Results of synthesis of a general view worm gearing to any way set axial section of a worm profile are stated. The mathematical model assuming enhancement of worm gear load capacity is offered.

Keywords: worm, gear, gearing, contact, a profile, the equation.

Надійшла до редколегії 18.01.2011