УДК 621.833

УРАВНЕНИЯ УПРУГОСТИ В БИПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Стрельников В. Н., Суков Г. С., Волошин А. И., Чибисов Ю. В., Лесняк Г. А.,
(ЗАО "НКМЗ" г. Краматорск, Украина)
rs@nkmz.donetsk.ua

Аннотация. *Разработана математическая модель напряженно – деформированного состояния в биполярной системе координат применительно к зубу цилиндрического колеса с профилем очерченным дугами окружности. Получены уравнения упругости для массива зуба и граничные условия на контуре его поперечного сечения. Уравнения упругости и граничные условия представлены в перемещениях.*
Ключевые слова: *уравнения упругости, напряжения, перемещения, граничные условия.*

1. Введение

Несмотря на очевидные достижения, прочностные расчёты зубьев далеки от совершенства. Расчёт зубьев на прочность при изгибе в соответствии с ГОСТ 21354–87, основан на балочной формуле с линейным законом распределения напряжения по поперечному сечению зуба. Последний рассматривается как консольная балка, нагруженная окружной силой на делительном цилиндре в торцовом сечении. Влияния формы зуба и галтели у его основания учитываются соответствующим коэффициентом. Местные напряжения, возникающие в зубе при изгибе, можно определить численными методами [1], или экспериментально, например методом фотоупругости. В работе [2] показано, что основными видами деформации зуба у основания является не только изгиб, но и сдвиг, торсионный изгиб и смещение, что не отражается в расчётных методиках. В задачу данного исследования входит вопрос о максимально возможной адаптации контура расчетной модели к реальному образцу [3, 4].

2. Основное содержание работы

Плоскодеформированное состояние описывается тензором напряжений:

$$T = \bar{e}_\alpha \cdot \bar{e}_\alpha \cdot \sigma_\alpha + (\bar{e}_\alpha \cdot \bar{e}_\beta + \bar{e}_\beta \cdot \bar{e}_\alpha)\tau_{\alpha\beta} + \bar{e}_\beta \cdot \bar{e}_\beta \cdot \sigma_\beta , \tag{1}$$

где σ_α, σ_β – напряжения нормальные к координатным линиям $\alpha = const$, $\beta = const$; $\tau_{\alpha\beta}$ – касательные напряжения на гранях элемента, выделенного координатными линиями: α, β, $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$.

Компоненты тензора напряжений удовлетворяют условиям равновесия. Уравнения равновесия представим в тензорной форме

$$\nabla T = 0, \tag{2}$$

где $\nabla = \frac{1}{H}\left(\bar{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} + \bar{e}_\beta \frac{\partial}{\partial\beta}\right)$ – оператор Гамильтона.

В силу ортогональности $\bar{e}_\alpha$, $\bar{e}_\beta$ выполняются равенства

$$\left.\begin{aligned}(\bar{e}_\alpha \cdot \bar{e}_\alpha) = (\bar{e}_\beta \cdot \bar{e}_\beta) = 1,\\ (\bar{e}_\alpha \cdot \bar{e}_\beta) = (\bar{e}_\beta \cdot \bar{e}_\alpha) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Запишем уравнение равновесия (2) с учетом значений (1) и (3)

$$\left(\bar{e}_\alpha \frac{\partial \bar{e}_\alpha}{\partial\alpha}\right)\bar{e}_\alpha\sigma_\alpha + \frac{\partial \bar{e}_\alpha}{\partial\alpha}\sigma_\alpha + \bar{e}_\alpha \frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\alpha} + \bar{e}_\alpha\left(\frac{\partial \bar{e}_\alpha}{\partial\alpha}\bar{e}_\beta\tau_{\alpha\beta}\right) + \frac{\partial \bar{e}_\beta}{\partial\alpha}\tau_{\alpha\beta} + \bar{e}_\beta \frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} +$$

$$+\bar{e}_\alpha\left(\frac{\partial\bar{e}_\beta}{\partial\alpha}\bar{e}_\beta\tau_{\alpha\beta}\right)+\bar{e}_\alpha\left(\frac{\partial\bar{e}_\beta}{\partial\alpha}\bar{e}_\beta\sigma_\beta\right)+\bar{e}_\beta\left(\frac{\partial\bar{e}_\alpha}{\partial\beta}\bar{e}_\alpha\sigma_\alpha\right)+\bar{e}_\beta\left(\frac{\partial\bar{e}_\alpha}{\partial\beta}\bar{e}_\beta\tau_{\alpha\beta}\right)+$$

$$+\bar{e}_\beta\left(\frac{\partial\bar{e}_\beta}{\partial\beta}\bar{e}_\alpha\tau_{\alpha\beta}\right)+\frac{\partial\bar{e}_\alpha}{\partial\beta}\tau_{\alpha\beta}+\bar{e}_\alpha\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\beta}+\bar{e}_\beta\left(\frac{\partial\bar{e}_\beta}{\partial\beta}\bar{e}_\beta\sigma_\beta\right)+\frac{\partial\bar{e}_\beta}{\partial\beta}\sigma_\beta+\bar{e}_\beta\frac{\partial\sigma_\beta}{\partial\beta}=0. \qquad (4)$$

Производные $\frac{\partial\bar{e}_\alpha}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\bar{e}_\beta}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\bar{e}_\alpha}{\partial\beta}$, $\frac{\partial\bar{e}_\beta}{\partial\beta}$ в равенстве (4) заменим соответствующими значениями: $\frac{\partial\bar{e}_\alpha}{\partial\alpha}=-\frac{H}{R_\beta}\bar{e}_\beta$, $\frac{\partial\bar{e}_\beta}{\partial\alpha}=\frac{H}{R_\beta}\bar{e}_\alpha$, $\frac{\partial\bar{e}_\alpha}{\partial\beta}=-\frac{H}{R_\alpha}\bar{e}_\beta$, $\frac{\partial\bar{e}_\beta}{\partial\beta}=\frac{H}{R_\alpha}\bar{e}_\alpha$ и получим уравнения равновесия в напряжениях

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\beta}+\frac{H}{R_\alpha}(\sigma_\beta-\sigma_\alpha)+\frac{2H}{R_\beta}\tau_{\alpha\beta}=0,\\&\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\sigma_\beta}{\partial\beta}+\frac{H}{R_\beta}(\sigma_\beta-\sigma_\alpha)-\frac{2H}{R_\alpha}\tau_{\alpha\beta}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Определим компоненты тензора деформации E^*

$$E^*=\frac{1}{2}\left(\nabla\bar{U}+(\nabla\bar{U})'\right), \qquad (6)$$

где $\bar{U}=\bar{e}_\alpha(U)+\bar{e}_\beta(V)$ – вектор смещения; $(\nabla\bar{U})'$ – транспонирование выражения $\nabla\bar{U}$.

Найдем выражение $\nabla\bar{U}$ и выполним операцию транспонирования [5]

$$\nabla\bar{U}=\bar{e}_\alpha\bar{e}_\alpha\left(\frac{1}{H}\frac{\partial U}{\partial\alpha}+\frac{V}{R_\beta}\right)+\bar{e}_\alpha\bar{e}_\beta\left(\frac{1}{H}\frac{\partial V}{\partial\alpha}-\frac{U}{R_\beta}\right)+$$

$$+\bar{e}_\beta\bar{e}_\alpha\left(\frac{1}{H}\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{V}{R_\alpha}\right)+\bar{e}_\beta\bar{e}_\beta\left(\frac{1}{H}\frac{\partial V}{\partial\beta}-\frac{U}{R_\alpha}\right), \qquad (7)$$

$$(\nabla\bar{U})'=\bar{e}_\alpha\bar{e}_\alpha\left(\frac{1}{H}\frac{\partial U}{\partial\alpha}+\frac{V}{R_\beta}\right)+\bar{e}_\alpha\bar{e}_\beta\left(\frac{1}{H}\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{V}{R_\alpha}\right)+$$

$$+\bar{e}_\beta\bar{e}_\alpha\left(\frac{1}{H}\frac{\partial U}{\partial\alpha}-\frac{V}{R_\beta}\right)+\bar{e}_\beta\bar{e}_\beta\left(\frac{1}{H}\frac{\partial V}{\partial\beta}-\frac{U}{R_\alpha}\right). \qquad (8)$$

Выражения (7) и (8) подставим в уравнение (6)

$$E^*=\left(\frac{1}{H}\frac{\partial U}{\partial\alpha}+\frac{V}{R_\beta}\right)\bar{e}_\alpha\bar{e}_\alpha+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H}\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}-\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)+\left(\frac{V}{R_\alpha}-\frac{U}{R_\beta}\right)\right)\bar{e}_\alpha\bar{e}_\beta+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{H}\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)+\left(\frac{V}{R_\alpha}-\frac{U}{R_\beta}\right)\right)\bar{e}_\beta\bar{e}_\alpha+\left(\frac{1}{H}\frac{\partial V}{\partial\beta}-\frac{U}{R_\alpha}\right)\bar{e}_\beta\bar{e}_\beta. \qquad (9)$$

Множители при ортах (9) являются компонентами тензора относительной деформации [6]:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{H}\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{V}{R_\beta}, \qquad \varepsilon_{\beta\beta} = \frac{1}{H}\frac{\partial V}{\partial \beta} - \frac{U}{R_\alpha}, \\ \gamma_{\alpha\beta} &= 2\varepsilon_{\alpha\beta} = 2\varepsilon_{\beta\alpha} = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \alpha}\right) + \left(\frac{V}{R_\alpha} - \frac{U}{R_\beta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Компоненты тензора напряжений для плоско - деформированного состояния выразим через компоненты тензора деформаций с помощью обобщенного закона Гука

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\alpha}\left(\varepsilon_{\alpha\alpha} + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_{\beta\beta}\right), \\ \sigma_\beta &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\alpha}\left(\varepsilon_{\beta\beta} + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_{\alpha\alpha}\right), \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{E}{2(1+\nu)\alpha}\gamma_{\alpha\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

В уравнениях (11) заменим $\varepsilon_{\alpha\alpha}$, $\varepsilon_{\beta\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}$ выражениями (10), коэффициенты Ляме H и радиусы R_α, R_β соответствующими значениями:

$$H_\alpha = H_\beta = \frac{a}{Ch\alpha + \cos\beta}, \quad R_\alpha = \frac{a}{Sh\alpha}, \quad R_\beta = \frac{a}{\sin\beta},$$

где a – половина межполюсного расстояния биполярной системы координат, получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\alpha}\left[(Ch\,\alpha + \cos\beta)\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial V}{\partial \beta}\right) + V\sin\beta - \frac{\nu}{1-\nu}USh\,\alpha\right], \\ \sigma_\beta &= \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\alpha}\left[(Ch\,\alpha + \cos\beta)\left(\frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial U}{\partial \alpha}\right) - U\,Sh\,\alpha + \frac{\nu}{1-\nu}V\sin\beta\right], \\ \tau_{\alpha\beta} &= \frac{E}{2(1+\nu)\alpha}\left[(Ch\,\alpha + \cos\beta)\left(\frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \alpha}\right) + (VSh\,\alpha - U\sin\beta)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Подставим значения коэффициентов Ляме H, радиусов R_α, R_β и выражения (12) в уравнения упругости (5) и поучим с учётом значений:

$$\frac{H}{R_\alpha} = \frac{Sh\,\alpha}{Ch\alpha + \cos\beta}, \qquad \frac{H}{R_\beta} = \frac{\sin\beta}{Ch\alpha + \cos\beta},$$

$$\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial \alpha} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\alpha}\left[Sh\,\alpha\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial V}{\partial \beta}\right) - \frac{\nu\,Ch\,\alpha}{(1-\nu)}U + \right.$$

$$\left. + (Ch\,\alpha + \cos\beta)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha\,\partial \beta}\right) + \frac{\partial V}{\partial \alpha}\sin\beta - \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial U}{\partial \alpha}Sh\,\alpha\right],$$

$$\frac{\partial \sigma_\beta}{\partial \beta} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\alpha}\left[-\sin\beta\left(\frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial U}{\partial \alpha}\right) + \frac{\nu}{(1-\nu)}U\cos\beta + \right.$$

$$\left. + (Ch\,\alpha + \cos\beta)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha\,\partial \beta}\right) - \frac{\partial U}{\partial \beta}Sh\,\alpha + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial V}{\partial \beta}\sin\beta\right],$$

$$\frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} = \frac{E}{2(1+\nu)\alpha}\left[Sh\,\alpha\left(\frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \alpha}\right) + V\,Ch\,\alpha + (Ch\,\alpha + \cos\beta)\times\right.$$

$$\times\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}\right)+\frac{\partial V}{\partial\alpha}Ch\,\alpha+\frac{\partial U}{\partial\alpha}\sin\beta\,\Bigg],$$

$$\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\beta}=\frac{E}{2(1+\nu)\alpha}\Bigg[-\sin\beta\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)-U\cos\beta+$$

$$+(Ch\,\alpha+\cos\beta)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)+\frac{\partial V}{\partial\beta}Sh\,\alpha-\frac{\partial U}{\partial\beta}\sin\beta\,\Bigg],$$

$$\sigma_\beta-\sigma_\alpha=\frac{E}{(1+\nu)\alpha}\left[(Ch\,\alpha+\cos\beta)\left(\frac{\partial V}{\partial\beta}-\frac{\partial U}{\partial\alpha}\right)-U\,Sh\,\alpha-V\sin\beta\right].$$

Получим уравнения упругости в перемещениях

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2}+\frac{2}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 U}{\partial\beta^2}+\frac{(3-4\nu)\cdot\sin\beta}{2(1-\nu)(Ch\alpha+\cos\beta)}\cdot\frac{\partial V}{\partial\alpha}+\\&+\frac{(3-4\nu)\cdot Sh\alpha}{2(1-\nu)(Ch\alpha+\cos\beta)}\frac{\partial V}{\partial\beta}-\frac{1}{(Ch\alpha+\cos\beta)}\left(Ch\alpha-\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\cos\beta\right)U=0,\\&\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2}-\frac{(3-4\nu)\sin\beta}{2(1-\nu)(Ch\alpha+\cos\beta}\frac{\partial U}{\partial\alpha}-\\&-\frac{(3-4\nu)Sh\alpha}{2(1-\nu)(Ch\alpha+\cos\beta)}\frac{\partial U}{\partial\beta}-\frac{1}{(Ch\alpha+\cos\beta)}\left(\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}Ch\alpha-\cos\beta\right)V=0.\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

Решение системы уравнений (13) определяет напряженно – деформированное состояние зуба. Это решение должно удовлетворять граничным условиям на контуре поперечного сечения зуба (рис. 1).

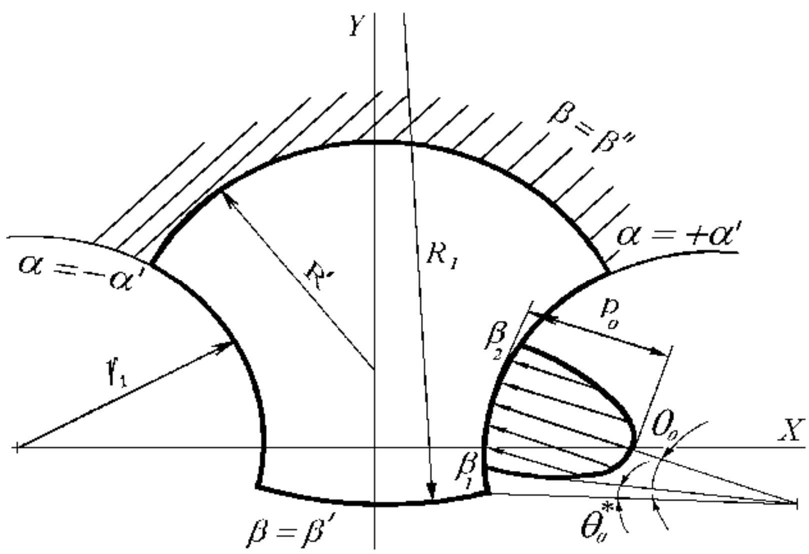

Рис. 1. Расчетная схема нагруженного зуба

Зададим граничные условия на координатных линиях, ограничивающих профиль зуба. На линии $\alpha=-\alpha$ отсутствует нагрузка. Следовательно на этой линии отсутствуют напряжения σ_α, $\tau_{\alpha\beta}$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\alpha\left(-\alpha'_1\beta\right)=0, \qquad \left(\beta_1\le\beta\le\beta_2\right),\\ \tau_{\alpha\beta}\left(-\alpha'_1\beta\right)=0, \qquad \left(\beta_1\le\beta\le\beta_2\right).\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

На линии $\alpha=\alpha'$ на участке изменения координаты β от β_1 до β_2 действует контактное давление $P(\beta)$. Остальные участки $\beta'\le\beta\le\beta_1$ и $\beta_2\le\beta\le\beta''$ свободны от нагрузки. Трением в зоне контакта пренебрегаем

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\alpha\left(\alpha^*,\beta\right)=\begin{cases}0, & \beta'\le\beta\le\beta_1,\\ -P\left(\alpha^*,\beta\right) & \beta_1<\beta<\beta_2,\\ 0, & \beta_2\le\beta\le\beta'';\end{cases}\\ \tau_{\alpha\beta}\left(\alpha^*,\beta\right)=0, \qquad \left(\beta'\le\beta\le\beta''\right).\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

На линии $\beta=\beta'$ отсутствует нагрузка σ_β и $\tau_{\alpha\beta}$ на этой линии обращаются в ноль

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\beta\left(\alpha,\beta'\right)=0, \qquad \left(-\alpha'\le\alpha\le\alpha'\right),\\ \tau_{\alpha\beta}\left(\alpha,\beta'\right)=0, \qquad \left(-\alpha'\le\alpha\le\alpha'\right).\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Линия контура $\beta=\beta''$ расположена в массиве. Граничное условие на этой линии рассматриваем как заделку

$$\left.\begin{aligned}U\left(\alpha_1\beta_2\right)=0, \qquad \left(-\alpha'\le\alpha\le\alpha'\right),\\ V\left(\alpha_1\beta_2\right)=0, \qquad \left(-\alpha'\le\alpha\le\alpha'\right).\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Заменяя $\sigma_\alpha,\sigma_\beta,\tau_{\alpha\beta}$ по формулам (12) закона Гука, получим граничные условия в перемещениях:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial\alpha}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)+\frac{\sin\beta}{Ch\alpha*+\cos\beta}V-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{Sh\alpha*}{Ch\alpha*+\cos\beta}U\right\}_{\alpha=-\alpha'}=0,\\
&\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)-\frac{Sh\alpha*}{Ch\alpha*+\cos\beta}V-\frac{Sin\beta}{Ch\alpha*+\cos\beta}U\right\}_{\alpha=-\alpha'}=0,\\
&\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial\alpha}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)+\frac{\sin\beta}{Ch\alpha*+\cos\beta}V-\right.\\
&\left.-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{Sh\alpha*}{Ch\alpha*+\cos\beta}U\right\}_{\alpha=\alpha'}\quad\begin{cases}0, & \beta'\le\beta\le\beta_1,\\ -\dfrac{P\alpha\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}{\left(1-\nu\right)E}, & \beta_1<\beta<\beta_2,\\ 0, & \beta_2\le\beta\le\beta'.\end{cases}\\
&\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)+\frac{Sh\alpha^*}{Ch\alpha^*+\cos\beta}V-\frac{\sin\beta}{Ch\alpha^*+\cos\beta}\right\}_{\alpha=\alpha'}=0,\\
&\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial\beta}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial U}{\partial\alpha}-\frac{Sh\alpha}{Ch\alpha+\cos\beta_1}U+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\sin\beta_1}{Ch\alpha+\cos\beta_1}V\right\}_{\beta=\beta'}=0,\\
&\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}+\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)+\frac{Sh\alpha}{Ch\alpha+\cos\beta_1}V-\frac{\sin\beta_1}{Ch\alpha+\cos\beta_1}U\right\}_{\beta=\beta'}=0
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Уравнения упругости (13) совместно с граничными условиями (18) дают единственное решение задачи о напряженно - деформированном состоянии зуба. Для практического решения граничной задачи упругости могут быть использованы приближенные методы, например, дискретный метод решения дифференциальных уравнений упругости.

3. Заключение

Решена граничная задача упругости в тензерной форме для зуба цилиндрического колеса с профилем очерченным дугами окружности. Компоненты тензора напряжений для плоско - деформированного состояния зуба выражены через компоненты тензора деформаций с помощью обобщенного закона Гука. Система уравнений упругости получена в перемещениях, решение которой определяет напряженно – деформированное состояние зуба. Это решение должно удовлетворять граничным условиям на контуре поперечного сечения зуба, расчетная модель которого очерчена координатными линиями. Граничные условия также получены в перемещениях. Полученное решение представляет интерес для прочностных расчетов зубчатых колес.

Список литературы: **1.** Иосилевич Г. Б., Осипова Г. В. Применение численных методов решения задач теории упругости к расчёту зубчатых передач. - Вестник машиностроения, 1976, № 4,с. 19 - 23. **2.** Analiza fleksibilnosti osnove zubi Celnika analusis of gear teeth base flexibitity. Marunic Cordana. Eng. Rev. 2000. 20. c. 45 - 52. **3.** Стрельников В.Н. Расчёт зубьев кругового профиля на прочность // Опыт исследования, проектирования, изготовления и эксплуатации передач Новикова. Тезисы докладов Межреспубликанской научно-технической конференции - Рига: ЛРП ВНТОМ. - 1989. - С. 31 - 33. **4.** Стрельников В.Н. О расчёте на прочность зуба в передаче с промежуточными телами качения // Республ. научно-техн. конф. ″Научные достиж. и опыт отрасл. машиностр. – нар. хоз.″. Тезисы докл.- Севастополь: ВНТОМ. – 1991. – С. 44 – 45. **5.** Стрельников В.Н. Напряжённо – деформированное состояние зубьев передачи с промежуточными телами качения // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Междунар. сб. научн. тр. - Донецк: Донецкий гос. техн. ун-тет. 2003. - Вып. 26.- С. 90–108. **6.** Демидов С. П. Теория упругости. М., «Высшая школа», 1979, с. 432.

Поступила в редколлегию 26.05.2010 г.

THE ELASTICITY EQUATIONS IN BIPOLAR COORDINATES

Strelnikov V. N., Sukov G. S., Voloshin A. I., Chibisov Y.V., Lesnjak G. A.,

(Joint-Stock Company "NKMZ", Kramatorsk, Ukraine)

The Abstract. *The mathematical model deflected mode in a bipolar frame with reference to a cylindrical gear tooth with a profile delineated by circle arcs is developed. The equations of elasticity for an array of a tooth and boundary conditions on a head loop of its cross-section are received. The equations of elasticity and boundary conditions in migrations are presented.*

Keywords: *the equations of elasticity, tensions, migration, boundary conditions.*

РІВНЯННЯ ПРУЖНОСТІ В БІПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ

Стрельніков В. М., Суков Г. С., Волошин А. И., Чібісов Ю. В., Лесняк Г. А.,

(ЗАТ "НКМЗ" м. Краматорськ, Україна)

Анотація. *Розроблено математичну модель напружено - деформованого стану в біполярній системі координат стосовно до зуба циліндричного колеса із профілем обкресленим дугами окружності. Отримано рівняння пружності для масиву зуба й граничні умови на контурі його поперечного переріза. Рівняння пружності й граничних умов представлені в переміщеннях.*

Ключові слова: *рівняння пружності, напруги, переміщення, граничні умови.*