УДК 621.833

АППРОКСИМАЦИЯ ЗУБА ВНУТРЕННЕГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ С ПРОФИЛЕМ ОЧЕРЧЕНЫМ ДУГАМИ ОКРУЖНОСТИ

Стрельников В. Н., Суков Г. С., Волошин А. И., Титаренко А.И., Лесняк Г. А.,
(ЗАО ”НКМЗ“ г. Краматорск, Украина)
rs@nkmz.donetsk.ua

Аннотация. *Разработан метод аппроксимации зуба цилиндрических колес внутреннего зацепления с профилем очерченным дугами окружности в биполярной системе координат, что в значительной мере сокращает объем выполняемых работ и упрощает математическое представление расчетной модели. Полученные результаты можно применять в вычислительных программах для составления всех необходимых уравнений математической модели напряженно – деформированного состояния зуба.*
Ключевые слова: *биполярная система координат, координатные функции, радиусы кривизны, аппроксимация профиля зуба.*

1. Введение

Исследованию напряжений в зубчатых колесах посвящено множество работ, в большинстве из которых преобладают численные методы, преимущественно метод конечных элементов [1 – 7]. Однако применение этого метода сопряжено с известными трудностями, возникающими при описании напряженно – деформированного состояния зуба в окрестностях его контура. Попытки улучшить граничные условия не привели к общему решению этой задачи упругости [8, 9], поэтому проведение достоверных расчетов на прочность зубчатых колес оказывается весьма сложным. С целью преодоления этих трудностей и в качестве первого этапа исследований по уточнению прочностного расчета зубчатых колес внутреннего зацепления с профилем зубьев очерченным дугами окружности, в настоящей статье приводится метод аппроксимации массива зуба в биполярной системе координат. Разработанный метод упрощает анализ напряженно – деформированного состояния зуба и в максимальной степени уточняет граничные условия задачи.

2. Основное содержание работы

Для расчета выделим из массива, составляющего зубчатое колесо, отдельный зуб цилиндрической поверхностью большого радиуса R'. В результате сечение зуба будет ограничено замкнутым контуром, образованным дугами образующих окружностей боковых поверхностей с радиусами r_1 и радиусом R_1 очерчивающим окружности вершин зубьев. Для построения профиля зуба задается радиус R_1^* центров образующих окружностей и число зубьев z_1 колеса с угловым шагом зубьев λ_1. Радиусы окружностей R', выделяющие зубья из массива, получаются геометрическим построением. Взаимодействие зуба с массивом рассматриваем как заделку. Участок зуба загружен нормальной контактной нагрузкой. Остальные части поверхности зуба свободны от нагрузки. Граничная задача о прочности зуба представляется в биполярных координатах (рис. 1). Координатными линиями биполярной системы координат являются окружности. Возможен выбор системы координат, для которой окружности радиусов r_1 образующие профиль зубьев и R' вырезывающие зуб из массива, будут координатными линиями, а окружность выступов с радиусом R_1 будет заменена близкой к ней координатной линией. На оси абсцисс координатной плоскости $X0Y$ симметрично относительно начала координат расположим полюсы O' и $0''$. Расстояние между полюсами примем равным $2a$.

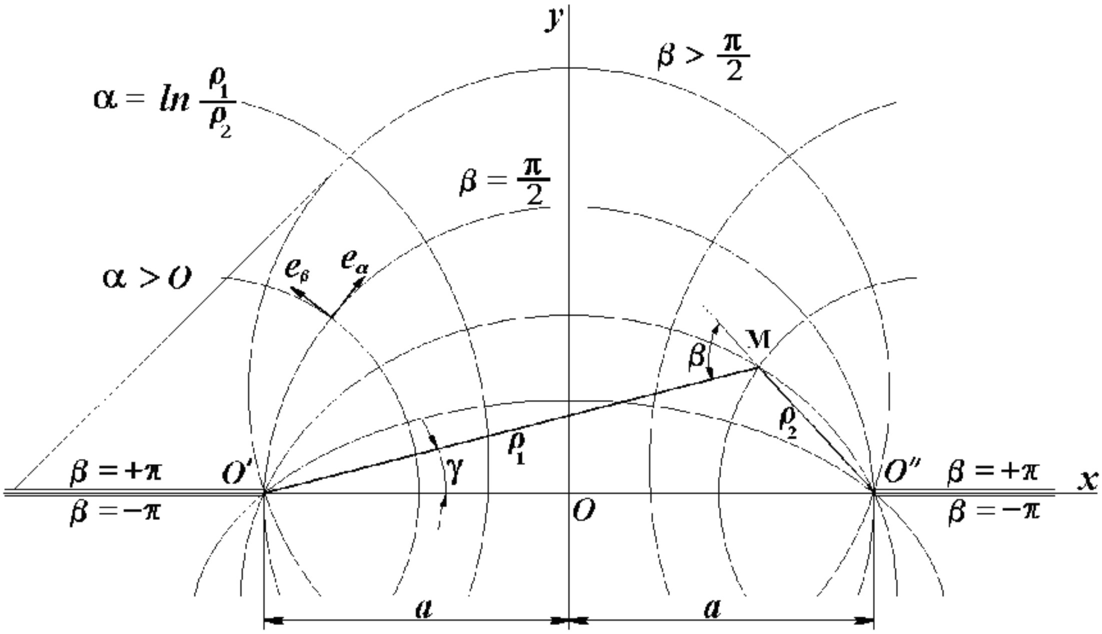

Рис. 1 Координатные линии биполярной системы координат

Из полюсов в произвольную точку плоскости *X0Y* проведем радиусы ρ_1 и ρ_2. Задание абсолютных величин ρ_1 и ρ_2 не определяет однозначно положение точки *M* на плоскости: для заданных ρ_1 и ρ_2 получаются две точки симметрично относительно оси абсцисс. Неоднозначность устраним введя биполярные координаты α и β. За координату α примем $\alpha = ln\frac{\rho_1}{\rho_2}$. Правой полуплоскости *X0Y* соответствуют положительные значения α, левой – отрицательные. За координату β примем внешний угол треугольника *0′0″M*, отсчитанный от продолжения радиуса ρ_2 до ρ_1, так чтобы $|\beta| < 180°$. Положительный угол отсчитывается против стрелки часов, отрицательный – по ходу часовой стрелки. Верхней полуплоскости соответствуют положительные значения углов β, нижней – отрицательные.

Однозначность нарушается на оси абсцисс при $|X| \geq a$. Вдоль линий $Y = 0$ при $X \leq -a$ и $X \geq a$ следует сделать разрезы. Верхним берегам разрезов соответствуют значения $\beta = \pi$, нижним $\beta = -\pi$. Установим связь декартовых и биполярных координат. В соответствии с рис. 1 получим

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos\beta = 4a^2.$$

Выразим радиусы ρ_1 и ρ_2 через α и β, учитывая при этом $\rho_1 = \rho_2 \cdot e^\alpha$

$$\rho_1 = \frac{2ae^\alpha}{\sqrt{\left(e^{2\alpha}+1\right) + 2e^\alpha \cos\beta}}, \qquad \rho_2 = \frac{2a}{\sqrt{\left(e^{2\alpha}+1\right) + 2e^\alpha \cos\beta}}. \qquad (1)$$

Установим зависимость между декартовыми координатами *X*, *Y* некоторой точки *M* и биполярными. Из треугольника *0′0″M* находим

$$\rho_1 \cos\gamma = X + a, \qquad \rho_2^2 = \rho_1^2 + 4a^2 - 4a\rho_1 \cos\gamma . \tag{2}$$

Для определения координат *X* воспользуемся формулами (1), (2) теоремой косинусов и выражениями гиперболических функций

$$X = \frac{a \cdot Sh\,\alpha}{Ch\,\alpha + \cos\beta}. \tag{3}$$

Для определения координаты *Y* определим площадь треугольника *0′0″M*: $0{,}5 \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \sin\beta = ay$, откуда

$$Y = \frac{a \cdot \sin\beta}{Ch\,\alpha + \cos\beta}. \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) определяют уравнения координатных линий в параметрической форме, если в них поочередно полагать α = *const*, β = *const*.

Найдем уравнения координатных линий в явной форме. Считаем координату α постоянной. Исключим из уравнений (3) и (4) координату β. Делим уравнение (4) на уравнение (3) и определяем $\sin\beta = \frac{Y}{X} sh\,\alpha$. Из уравнения (3) $\cos\beta = \frac{a}{X} Sh\,\alpha - Ch\,\alpha$.

Исключим параметр β и получим уравнение окружности

$$\left(X - a\frac{Ch\,\alpha}{Sh\,\alpha}\right)^2 + Y^2 = \frac{a^2}{Sh^2\alpha}. \tag{5}$$

Из уравнения (5) следует, что центры окружностей α = *const* расположены на оси *X*, имеют координаты $\left(a \cdot \frac{Ch\,\alpha}{Sh\,\alpha}; 0\right)$ и радиусы окружностей $R_\alpha = \frac{a}{Sh\,\alpha}$.

Полагаем постоянной координату β. Из уравнений (3) и (4) исключим координату α, находим

$$Sh\,\alpha = \frac{X}{Y} Sin\,\beta, \qquad Ch\,\alpha = \frac{a \cdot \sin\beta}{Y} - \cos\beta.$$

Исключаем координату α, заменяя *Ch*α и *Sh*α соответствующими значениями

$$X^2 + (Y + a \cdot ctg\,\beta)^2 = \frac{a^2}{\sin^2\beta}. \tag{6}$$

Координатные линии β = *const* – окружности (6) с центрами на оси *Y*, имеют координаты (*0; – a ctg* β) и радиусы окружностей координатных линий $R_\beta = \frac{a}{\sin\beta}$.

Координатные линии проходят через полюсы биполярной системы координат. Для доказательства в уравнении (7.6) семейства линий надо положить *Y* = *0*, получаем *X* = ± *a*. Через каждую точку плоскости с координатами (α*;* β) проходит пара ортогональных координатных линий α = *const;* β = *const*. Для доказательства ортогональности координатных линий, определим угловые коэффициенты касательных K_α и K_β к координатным линиям α = *const* и β = *const*, в точке их пересечения

$$K_\alpha = \frac{Y'_\beta}{X'_\beta}, \qquad K_\beta = \frac{Y'_\alpha}{X'_\alpha}. \qquad (7)$$

Дифференцируем выражения координатных функций (3) и (4)

$$\left.\begin{aligned} X'_\alpha &= \frac{a(1+Ch\,\alpha\, \cos\beta)}{(Ch\,\alpha + \cos\beta)^2}, \quad & X'_\beta &= \frac{a\cdot Sh\,\alpha \cdot \sin\beta}{(Ch\,\alpha + \cos\beta)^2}, \\ Y'_\alpha &= \frac{a\cdot \sin^2\beta \cdot Sh\,\alpha}{(Ch\,\alpha + \cos\beta)^2}, \quad & Y'_\beta &= \frac{a(1+Ch\,\alpha\cdot \cos\beta}{(Ch\,\alpha + \cos\beta)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

и подставляем в формулы (7)

$$K_\alpha = \frac{(1+Ch\,\alpha\cdot\cos\beta)}{Sh\,\alpha\cdot\sin\beta}, \qquad K_\beta = -\frac{\sin\beta\cdot Sh\,a}{(1+Ch\,\alpha\cdot\cos\alpha)}. \qquad (9)$$

Из формул (9) следует условие ортогональности координатных линий

$$K_\alpha \cdot K_\beta = 1. \qquad (10)$$

Вдоль координатных линий β = *const* и α = *const* направим орты $\vec{e}_\alpha$ и $\vec{e}_\beta$. Орт $\vec{e}_\alpha$ направлен в сторону возрастания координаты α по касательной к линии β = *const*, орт $\vec{e}_\beta$ направлен в сторону возрастания координаты β по касательной к линии α = *const* (рис. 2). Связь между приращением криволинейной координаты и дифференциалом дуги координатной линии определяется коэффициентами Ляме

$$dS_\alpha = H_\alpha \cdot d\alpha, \qquad dS_\beta = H_\beta \cdot d\beta. \qquad (11)$$

Коэффициенты H_α и H_β определяются по формулам

$$H_\alpha = \sqrt{(X'_\alpha)^2 + (Y'_\alpha)^2}, \qquad H_\beta = \sqrt{(X'_\beta)^2 + (Y'_\beta)^2}. \qquad (12)$$

Подставим в выражения (12) значения X'_α, X'_β, Y'_α, Y'_β из формул (8)

$$H_\alpha = H_\beta = H = \frac{a}{Ch\,\alpha + \cos\beta}. \qquad (13)$$

В соответствии с значениями (11), (12), (13) частные производные ортов $\vec{e}_\alpha$, $\vec{e}_\beta$

$$\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial\alpha} = -\frac{H}{R_\beta}\cdot\vec{e}_\beta; \quad \frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial\alpha} = \frac{H}{R_\beta}\cdot\vec{e}_\alpha; \quad \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial\beta} = -\frac{H}{R_\alpha}\vec{e}_\beta; \quad \frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial\beta} = \frac{H}{R_\alpha}\vec{e}_\alpha. \qquad (14)$$

Определим параметры аппроксимированного профиля зуба колеса. Линейные размеры находим в соответствии с (рис. 3).

$$KZ = \left(R_2^* + r_2\right) tg\, {}^{\lambda_2}\!/_2, \qquad (15)$$

$$CZ = \frac{R_2^* \sin{}^{\lambda_2}\!/_2 + r_2}{\cos{}^{\lambda_2}\!/_2}. \qquad (16)$$

Уравнение координатной линии β = β″

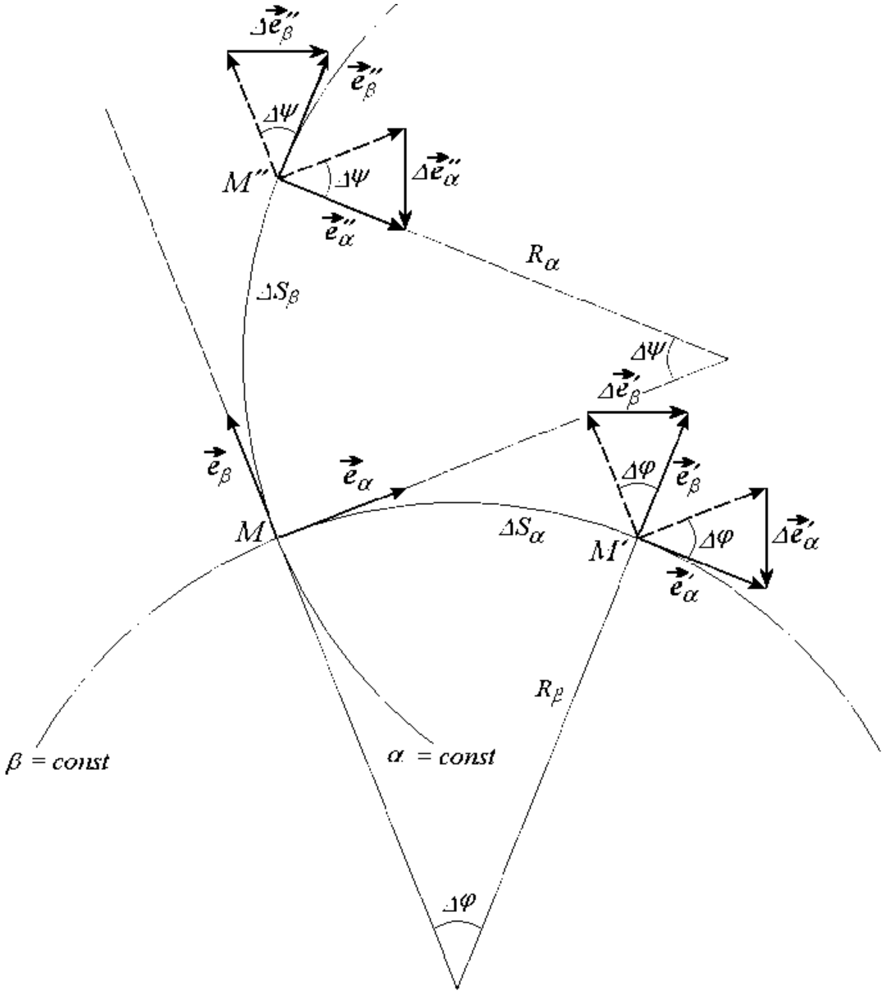

Рис. 2. Схема приращения ортов координатных линий

$$X^2 + (Y - CZ)^2 = (KZ)^2 . \qquad (17)$$

Половина межполюсного расстояния a' определяется из уравнения (17) при $Y = 0, X = a'$

$$a' = \sqrt{R_2^{*2} \sin^2 \lambda_2 / 2 - r_2^2} . \qquad (18)$$

Параметр β'' определяется из выражения для радиусов координатных линий R_β

$$\beta'' = \arcsin\left(\frac{\sqrt{R_2^{*2} \sin^2 \lambda_1 / 2 - r_2^2}}{\left(R_2^* + r_2\right) tg \lambda_2 / 2} \right) . \qquad (19)$$

Параметр α'' определяется из выражения для радиусов координатных линий R_α

$$Sh\alpha' = \frac{\alpha'}{r_2} . \qquad (20)$$

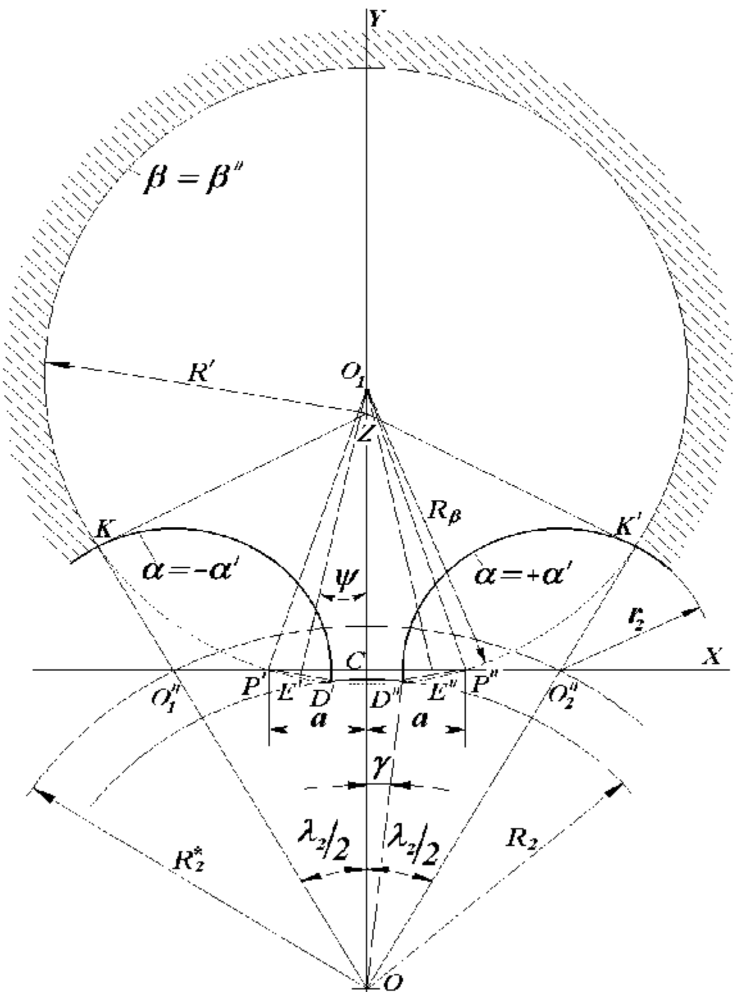

Рис. 3. Аппроксимация профиля зуба центрального колеса

Представим гиперболический синус (20) через показательные функции и решим полученное квадратное уравнение

$$e^{\alpha'} = \sqrt{\frac{a'^2}{r_2^2}+1}+\frac{a'}{r_2}. \tag{21}$$

В выражение (21) подставим значение a' по формуле (18) и находим

$$\alpha' = \ln\left[\frac{R_2^*}{r_2}\sin{}^{\lambda_2}\!/_2 + \sqrt{\left(\frac{R_2^*}{r_2}\sin{}^{\lambda_2}\!/_2\right)^2 - 1}\right]. \tag{22}$$

Уравнения окружностей с радиусами r_2 и R_2^*, пересекающихся в точке D''

$$\left(X - R_2^*\sin{}^{\lambda_2}\!/_2\right)^2 + Y^2 = r_2^2, \qquad X^2 + \left(Y + R_2^*\cos{}^{\lambda_2}\!/_2\right)^2 = R_2^2. \tag{23}$$

В уравнениях (23) (24) заменим X и Y на координаты точки D'' т. е. $\left(X_{D''}, Y_{D''}\right)$ и после преобразований получим

$$X_{D''} \sin \lambda_2/2 + Y_{D''} \cos \lambda_2/2 = \frac{R_2^2 - r_2^2 - R_2^{*2} \cos\lambda_2}{\eta R_2^*}. \qquad (24)$$

Координаты точки D'' выразим через угол γ (рис. 3)

$$\left.\begin{aligned} X_{D''} &= R_2 \sin\gamma, \\ Y_{D''} &= R_2 \cos\gamma - R_2^* \cos \lambda_2/2. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Выражения (25) подставим в равенство (24) и находим

$$\cos\left(\frac{\lambda_2}{2} - \gamma\right) = \frac{R_2^2 - r_2^2 + R_2^{*2}}{2R_2R_2^*}. \qquad (26)$$

Определим координаты точки E'' (рис. 3)

$$X_{E''} = \frac{R_2 \sin\gamma + a'}{2}, \qquad Y_{E''} = \frac{R_2 \cos\gamma - R_2^* \cos \lambda_2/2}{2}. \qquad (27)$$

Определяем угол ψ' из уравнений (27)

$$\sin\psi' = \frac{-R_2^* \cos \lambda_2/2 + R_2 \cos\gamma}{\sqrt{\left(R_2^* \cos \lambda_2/2 - R_2 \cos\gamma\right)^2 + \left(R_2 \sin\gamma + a'\right)^2}}. \qquad (28)$$

Определяем апофему O_1E'

$$O_1E' = \frac{R_2 \sin\gamma + a'}{2\,|\sin\psi'|}. \qquad (29)$$

Находим расстояние $E'P''$

$$E'P'' = \frac{1}{2}\sqrt{\left(R_2 \cos\gamma - R_2^* \cos \lambda_2/2\right)^2 + \left(a' - R_2 \sin\gamma\right)^2}. \qquad (30)$$

По теореме Пифагора вычисляем радиус $R_{\beta''}$

$$R_{\beta'} = \frac{\sqrt{\left(R_2 \sin\gamma + a'\right)^2 + \left(R_2^* \cos \lambda_2/2 - R_2 \cos\gamma\right)^2 + \left(a - R_2 \sin\gamma\right)^2 \cdot \sin^2\psi'}}{2\sin\psi'}. \qquad (31)$$

3. Заключение

Выполненные исследования позволяют упростить построение математической модели граничной задачи упругости для зуба цилиндрического колеса внутреннего зацепления с профилем очерченным дугами окружности. При этом сетка биполярных координатных линий задается таким образом, что отдельные координатные линии совпадают с профилем исследуемого зуба, что обеспечивает высокую точность оценки напряженного состояния не только массива зуба, но и его граничных слоев.

Полученные результаты можно применять в вычислительных программах для составления всех необходимых уравнений математической модели напряженно – деформированного состояния зуба.

Список литературы: 1. Короткин В. И. Расчет нагрузки в цилиндрических зубчатых передачах Новикова //Вестник машиностроения. – 2005. - № 8. – С. 11 – 15. **2.** Айрапетов Э. Л. Совершенствование методов расчета нагруженности и прочности передач зацеплением // Междунар. конф. "Качество зубчатых передач. Контактные разрушения" (ТРИБО-2001). - Техн. машиностр. – 2001. - № 2. – С. 8 - 33. **3.** Ведмедь Ю. П. О контактных и изгибных напряжениях, действующих в зубчатых передачах // Машиностроитель. – 2002. - № 3. – С. 38 – 40. **4.** Komori Masahari, Kubo Aizoh, Kawasaki Yoshiki (Kyoto University, Dept of Precision Engineering, Yoshidahonmachi, Sakuo-ku Kyoto, Kyoto, 606-8501 Japan). Nihon kikai gakkai ronbunshu. C=Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. C. 2000. 66, c. 1959 – 1966. **5.** Miyashika Kouitsu, Oda Satashi, Ren Hong Guang, Yong Tech Foo, Takano Yasunari (Department of Mechanical Engineering, Tottori University, 4 – 101 Minami, Koyamacho, Tottori-shi, Tottori, 680 – 8552 Japan). Nihon kikai gakkai ronbunshu. C=Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. C. 2001. 67, № 660, c. 2636 – 2642. **6.** Yeh Thomas, Yang. Daniel C. H., Tong Shih- His. Design of new tooth profiles for high-load capacity gears (Mechanical and Aerospace Engineering Department, School of Engineering and Applied Science, University of California at Los Angeles, 420 Westwood Plaza, Los Angeles, CA 90095-1597, USA). Mech. And Mach. Theory. 2001/ 36, № 10, c. 1105-1120. **7.** Analiza fleksibilnosti osnove zubi Celnika analusis of gear teeth base flexibitity. Marunic Cordana. Eng. Rev. 2000. 20. c. 45-52. **8.** Tae Hyong Chong, Kubo A. Simple Stress Formulae for a Thin-Rimmed Spur Gear.Part 1: Derivation of Approximation Formulae for Tooth Fillet and Root Stresses. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, № 3, 1985, pp. 406 – 411. **9.** Tae Hyong Chong, Kubo A. Simple Stress Formulae for a Thin-Rimmed Spur Gear.Part 2: Tooth Fillet and Root Stresses Calculation of a Thin-Rimmed Internal Spur Gear. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, № 3, 1985, pp. 412 – 417.

Поступила в редколлегию 27.05.2010 г.

APPROXIMATION OF A CYLINDRICAL INTERNAL GEAR TOOTH WITH A PROFILE DELINEATED BY CIRCLE ARCS

Strelnikov V. N., Sukov G. S., Voloshin A. I., Titarenko A. I., Lesnjak G. A.,
(*Joint-Stock Company "NKMZ", Kramatorsk, Ukraine)*

The Abstract. *The method of approximation of a cylindrical internal gear tooth with a profile delineated by circle arcs in a bipolar frame is developed, that appreciably reduces volume of executable operations and simplifies mathematical introducing of assumption model. The received results can be applied in computing programs for drawing up of all necessary equations of mathematical model deflected mode of a tooth*

Keywords: *a bipolar coordinate system, radiuses of curvature, approximation of a tooth profile.*

АПРОКСИМАЦІЯ ЗУБА ВНУТРІШНЬОГО ЗАЧЕПЛЕННЯ ІЗ ПРОФІЛЕМ ОКРЕСЛЕНИЙ ДУГАМИ ОКРУЖНОСТІ

Стрельніков В. М., Суков Г. С., Волошин А. И., Тітаренко О.И., Лесняк Г. А.,
(ЗАТ "НКМЗ" м. Краматорськ, Україна)

Анотація. *Розроблено метод апроксимації зуба циліндричних коліс внутрішнього зачеплення їз профілем обкресленим дугами окружності в біполярній системі координат, що значною мірою скорочує обсяг виконуваних робіт і спрощує математичне подання розрахункової моделі. Отримані результати можна застосовувати в обчислювальних програмах для складання всіх необхідних рівнянь математичної моделі напружено - деформованого стану зуба.*

Ключові слова: *біполярна система координат, координатні функції, радіуси кривизни, апроксимація профілю зуба.*