УДК 534.38

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВИБРОМАШИНЫ, СУПЕРГАРМОНИЧЕСКИЕ РЕЗОНАНСЫ И ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИЕ ВИБРАЦИИ

Беловодский В.Н., Сухоруков М.Ю. *(ДонНТУ, г. Донецк, Украина)*

Аннотация. *Рассматриваются вибромашины одномассной схемы с гармоническим возбуждением и полиномиальной характеристикой восстанавливающей силы. Описывается программное обеспечение для решения отдельных задач динамики машин, — построения амплитудно-частотных характеристик, анализа спектрального и фазового состава периодических режимов, построения их областей притяжения. Для отдельных соотношений параметров приводятся результаты анализа колебаний в зонах возбуждения супергармонических резонансов порядков 2:1 и 3:1, показаны возможности таких систем в части формирования полигармонических вибраций.*

Ключевые слова: *вибромашина, супергармонический резонанс, полигармоническая вибрация, амплитудно-частотная характеристика, спектральный и фазовый состав периодических режимов, область притяжения.*

1. Введение

В различных технологических процессах эффективны полигармонические вибрации [1]. Традиционно они формируются посредством многочастотных возбудителей, существенно усложняющих конструкцию виброустройств. Вместе с тем, известно, что при реализации комбинационных резонансов нелинейных динамических систем колебания имеют выраженный полигармонический характер и к 90-м годам XX века был накоплен определенный положительный опыт их экспериментального использования в вибромашинах [2, 3, 4]. Однако в настоящее времени этот опыт, по разным причинам, оказался невостребованным, хотя тенденция к разработке технических решений, реализующих нелинейные явления, по-прежнему прослеживается в патентной литературе [5]. Целью данной работы, исходя из этих обстоятельств, является стремление вернуть к этому вопросу внимание современных специалистов-практиков, путем рассмотрения нелинейных вибромашин одномассных схем продемонстрировать и, тем самым, напомнить о возможностях формирования полигармонических вибраций на примере супергармонических резонансов.

2. Рассматриваемая модель

Анализ литературы [6, 7] показывает, что динамика вибромашин одномассной схемы с идеальным возбуждением, как с кинематическим, так и силовым возбуждением, с достаточной для практики точностью в общем виде может быть описана одним дифференциальным уравнением второго порядка

$$m\ddot{x} + g(x, \dot{x}) + f(x) = P_0 \sin\omega t, \qquad (1)$$

где x — перемещение рабочего органа, m — его масса, с приведенной массой полезной нагрузки, $f(x)$ — характеристика восстанавливающей силы, $g(x, \dot{x})$ — сила сопротивления, а $P_0 = k_0\,\rho$ — в случае кинематического, и $P_0 = m_0\, r\,\omega^2$, — в случае инерционного возбудителей. Предполагая, что способы формирования нелинейной упругой характеристики доступны [1], рассмотрим случай кубической характеристики, а именно, будем считать, что $f(x) = k(x)\,x$, где $k(x) = c + d\,x + e\,x^2$. Заметим, что учет квадратичной составляющей в упругой силе вполне оправдан, хотя бы возможностью предварительного поджатия нелинейных упругих элементов с симметричной нелинейной характеристикой.

Остановимся на описании силы сопротивления.

В динамических расчетах вибромашин при относительно небольшой массе обрабатываемой среды допустимо ограничиваться учетом неупругого сопротивления в упругих связях, а величину его коэффициента считать пропорциональным коэффициенту жесткости этих связей [6, 7]. Оставаясь в рамках данной гипотезы, будем считать, что $g(x, \dot{x}) = \mu\, k(x)\, \dot{x}$, где $\mu = 10^{-3}$, — коэффициент неупругих сопротивлений, а $k(x)$ — коэффициент жесткости упругой системы, в результате чего уравнение (1) принимает вид

$$m\ddot{x} + \mu\,(c + d\,x + e\,x^2)\,\dot{x} + (c + d\,x + e\,x^2)\,x = P_0 \sin\omega\, t\,.$$

Сделав теперь замену

$$x = \xi\,\Delta\,,\ \omega_0\, t = \tau\,,\ \text{где}\ \omega_0^2 = c/m\,,\ \Delta = 10^{-3}\,\text{м}$$

и, разделив обе части уравнения на $m\omega_0^2\,\Delta$, получим его безразмерную форму

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \mu\,\omega_0\,(1 + \beta\,\xi + \gamma\,\xi^2)\frac{d\xi}{d\tau} + (1 + \beta\,\xi + \gamma\,\xi^2)\xi = P\sin\eta\tau\,, \qquad (2)$$

где $\beta = d\,\Delta/c$, $\gamma = e\Delta^2/c$, $P = P_0/(m\omega_0^2\,\Delta)$, $\eta = \omega/\omega_0$.

Ориентируясь на вибромашины технологического назначения [6, 7], далее, будем считать уровень сопротивления $\mu\,\omega_0 = 0.1$, оставляя возможность варьировать, по мере необходимости, другие параметры в модели (2).

3. Инструменты исследования

Основным инструментом исследования является численное моделирование с использованием разработанных приложений среды MATLAB, — программ для построения амплитудно-частотных характеристик (АЧХ), анализа спектрального и фазового состава стационарных колебаний, определения областей притяжения периодических режимов. Опишем вкратце эти программы.

Программа построения АЧХ. Базируется на реализации метода гармонического баланса к решению уравнения (2). Концептуально это выглядит так. Решение ищется в комплексной форме

$$\xi(\tau) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{i\,n\eta\tau}\,, \qquad (3)$$

где N — число учитываемых гармоник разложения решения в ряд Фурье. После подстановки (3) в (2) и сравнения коэффициентов при равных степенях $e^{i\,n\eta\tau}$, для определения коэффициентов c_n, c_{-n} получаем систему уравнений

$$(1 + i\,\mu\,\omega_0\, n\eta - n^2\eta^2)c_n + \beta \sum_{k=-N}^{N} c_k\, c_{n-k}\,(1 + i\,\mu\,\omega_0\,(n-k)\eta) +$$

$$+\gamma \sum_{k=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N} c_k\, c_m\, c_{n-k-m}\,(1 + i\,\mu\,\omega_0\,(n-k-m)\eta) = \begin{cases} i\,P/2, & n = -1 \\ -i\,P/2, & n = 1 \\ 0, & n \neq \pm 1 \end{cases} \qquad (4)$$

где $n, n-k, n-k-m \in [-N, N]$, численное решение которой средствами MATLAB и проводим далее, при последовательном изменении параметра τ. Для того, чтобы обеспечить, по возможности, нахождение всех решений системы (4) в области поиска генерируется множество равномерно расположенных пробных точек $ЛП_\tau$ -последовательности [8] на первой частоте возбуждения, которые принимаются в качестве начальных при решении системы (4). Далее, полученные решения принимаются в качестве начальных для следующей частоты возбуждения и т.д. Идентификация режимов производится в соответствии с их исходящими начальными точками начальной частоты возбуждения. После сканирования всего частотного диапазона производится вывод АЧХ на общий график.

Программа спектрального и фазового анализа. В нелинейных динамических системах возможность надежной теоретической оценки момента установления решения практически отсутствует. Поэтому в первоначальной версии программы предусмотрено его определение пользователем на основе визуального анализа получаемого численно решения. Эта процедура была реализована следующим образом.

Для заданных начальных условий проводится численное интегрирование уравнения (2) на указанном промежутке изменения τ и результат расчета, выбранной фазовой переменной, выводится на экран монитора. На основе его визуального анализа пользователь определяет момент наступления «стационарности» периодического режима и, указав его, вызывает продолжение программы расчета с последующим определением амплитудного и фазового спектра. При этом предполагается, что тригонометрическое представление решения имеет вид

$$\xi(\tau) = A_0 + \sum_{n=-N}^{N} A_n \cos(n\eta\tau - \varphi_n),$$

где амплитуды A_n определяются из соотношения $A_n = 2\sqrt{c_n c_{-n}}$, а начальные фазы гармонических составляющих, — из соотношений

$$\varphi_n = \arccos\frac{c_n + c_{-n}}{2\sqrt{c_n c_{-n}}} \text{ и } \varphi_n = 2\pi - \arccos\frac{c_n + c_{-n}}{2\sqrt{c_n c_{-n}}}, \text{ если } \operatorname{Im} c_{-n} < 0.$$

В последней версии программы предусмотрено также и автоматическое определение момента установления на основе сравнения фазовых координат системы в моменты времени, отстоящие на период возбуждения.

Программа построения областей притяжения периодических режимов. В данной работе была использована сканирующая версия алгоритма построения областей притяжения периодических режимов, точнее, их сечений $\tau = \tau_0$. Она основана на последовательном переборе начальных точек заданной области в виде n-мерного параллелепипеда, где $(n+1)$ — размерность фазового пространства рассматриваемой системы, и последующем построении их орбит с использованием отображения Пуанкаре. Программа допускает как задание интересующего периодического режима в виде неподвижной точки отображения Пуанкаре, так и указания лишь области поиска, после чего определение стационарных режимов и последующее параллельное построение их областей притяжения производится в автоматическом режиме. По желанию пользователя, вычислительный процесс может быть ограничен нахождением лишь ядер областей притяжения в виде наибольшего параллелепипеда, расположенного в области притяжения. Описание программы и результаты ее качественного тестирования приводятся в [9].

4. Результаты, анализ

Заранее отметим, что представленные ниже результаты имеют, скорее, информативный характер, они призваны продемонстрировать, как возможности нелинейных систем в части формирования полигармонических вибраций, так и возможности современного программного обеспечения.

На рис. 1 приводятся амплитудно-частотные характеристики периодических движений в зоне возбуждения супергармонических резонансов порядков 5:1, 3:1 и 2:1. При выполнении расчетов учитывались лишь пять гармонических составляющих в разложениях (3), что повлекло необходимость решать систему (4), содержащую одиннадцать уравнений. В свою очередь, это потребовало существенных затрат машинного времени и при изменении частоты возбуждения η с шагом равным 0.001, общее время на построение АЧХ на компьютере с процессором Intel Pentium 4 3.2 ГГц и оперативной памятью объёмом 3 ГБ составило 16560 сек.

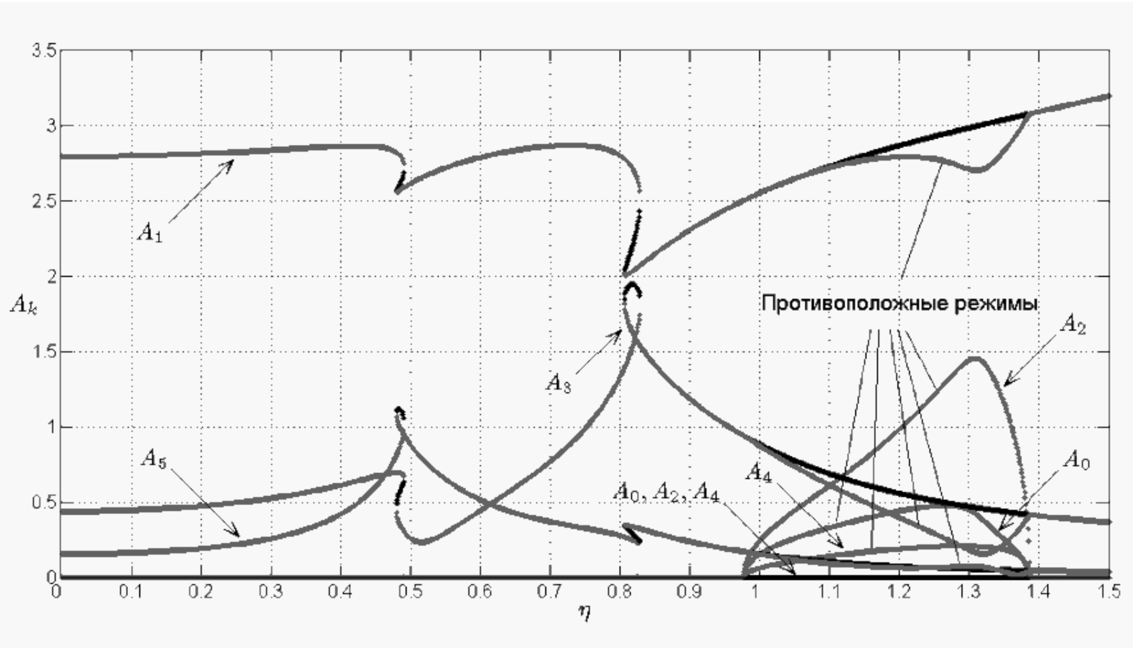

Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики периодических движений для $\beta = 0$, $\gamma = 0.5$, $P = 10$

Представленный результат показывает богатство спектрального состава в рассматриваемом частотном диапазоне и демонстрирует наличие, в определенных интервалах, соответствующих указанным резонансам, зон неоднозначности для принятых, при проведении расчетов, параметров системы. Помимо этого, возбуждение резонанса порядка 2:1, в частотном диапазоне $[0.9, 1.4]$, сопровождается возбуждением двух противоположных режимов. Они имеют равный спектральный состав и, по этой причине, на рисунке сливаются, это зона сдвоенных режимов. Сечение $t = 0$ их областей притяжения для $\eta = 1.2$ приводится на рис. 2. Оно дает определенное представление о запасе устойчивости каждого из стационарных режимов и, в зависимости от величины ядра области притяжения желаемого режима, может потребовать дополнительного изучения возможности выхода на него с учетом неидеальности источника возбуждения.

На рис. 3 приводится комплект диаграмм, иллюстрирующих динамику стационарных режимов движений, их спектрального и фазового состава вдоль одномерных сечений пространства параметров. В качестве опорной точки был принят набор $\beta = 0$, $\gamma = 0.5$, $P = 10$, $\eta = 1.2$, затем, путем изменения степени нелинейности упругой характеристики γ, величины ее асимметричности β, амплитуды P или частоты η силы возбуждения было проведено определение стационарных решений уравнения (2) при нулевых начальных условиях и выполнен их анализ. Представленные результаты демонстрируют влияние, по существу, каждого из варьируемых параметров на спектрально-фазовый состав колебаний и позволяют выделить некоторые тенденции при их изменении, в частности, — обогащение спектрального состава при изменении γ, за счет относительного увеличения нечетных гармоник, возможность «обращения» режимов при изменении степени асимметрии β упругой характеристики, а также, «обострение» нелинейных явлений при увеличении P, которое проявляется относительным усилением кратных гармоник. Отметим, что приведенные образцы спектрального и фазового состава колебаний дают основания полагать, что супергармонические резонансы рассматриваемых порядков вполне покрывают оптимальные, в частности, для виброперемещения и уплотнения, диапазоны амплитудных и фазовых соотношений [1].

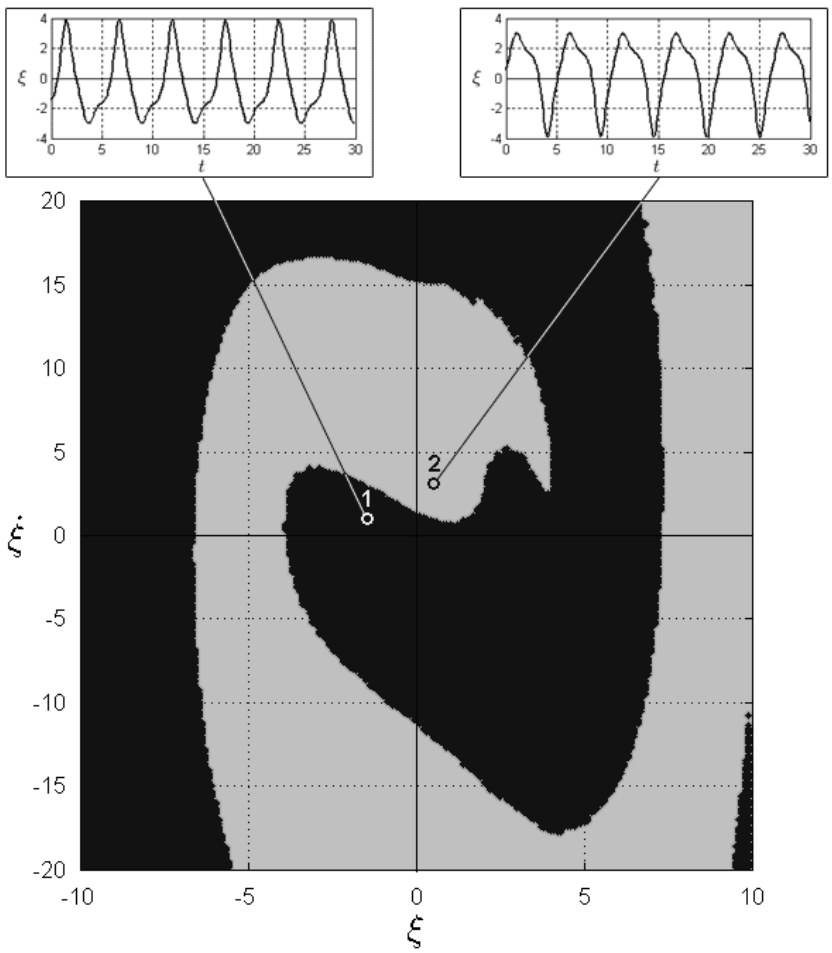

Рис. 2. Области притяжения стационарных движений для $\beta = 0$, $\gamma = 0.5$, $P = 10$, $\eta = 1.2$

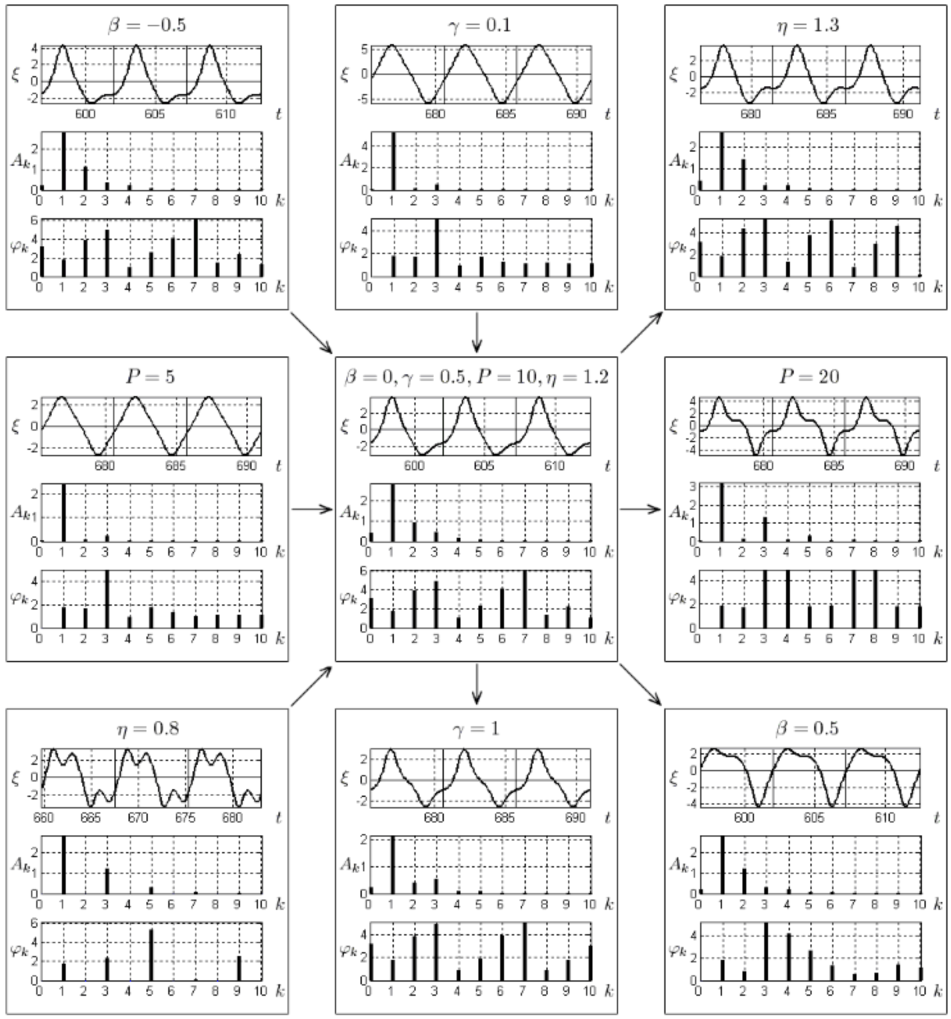

Рис. 3. Стационарные режимы движений, их спектральный и фазовый состав

5. Заключение

Представленные материалы, на наш взгляд, вполне определенно демонстрируют перспективные возможности нелинейных систем в части реализации полигармонических вибраций различного спектрального и фазового состава. Без сомнения, их практическое использование потребует разработки соответствующих технических решений, реализующих оптимальные соотношения параметров и обеспечивающих нужный уровень нелинейных и возмущающих факторов. Однако, в случае комбинированного приложения усилий специалистов-динамиков и практиков-конструкторов, успех на этом пути, на наш взгляд, вполне реален.

Список литературы: **1.** Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т. 4. Вибрационные процессы и машины / Под ред. Э.Э. Лавендела. — М.: Машиностроение, 1981. — 509 с. **2.** Быховский И.И. Основы теории вибрационной техники. — М.: Машиностроение, 1968. — 362 с. **3.** Хвингия М.В., Тедошвили М.М., Питимашвили И.А. Электромагнитные субгармонические возбудители колебаний. — Тбилиси: Мецниереба, 1987. — 136 с. **4.** Цыфанский С.Л., Бересневич В.И., Окс А.Б. Практическое использование нелинейных эффектов в вибрационных машинах. — СПб: Политехника, 1992. — 95 с. **5.** Многочастотная вибрационная сепараторная система, вибрационный сепаратор, содержащий эту систему, и способ вибрационной сепарации твердых частиц. Патент РФ 2256515, 2005. Патент Украины UA 74544 C2, 2005. Авторы И. Круш, Ю. Ободан. **6.** Крюков Б.И. Динамика вибрационных машин резонансного типа. — К: Наукова думка, 1967. — 212 с. **7.** Аснер В.И., Каминский В.С., Клочко Г.П. и др. Конструкции и расчеты фильтрующих центрифуг. — М.: Недра, 1976. — 216 с. **8.** Соболь И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. — М.: Наука, 1981. — 110 с. **9.** Беловодский В.Н., Сухоруков М.Ю. Сканирующий алгоритм построения областей притяжения периодических режимов. — Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем. Донецк, ДонНТУ, 2010. — В печати.

Надійшла до редколегії 11.05.2010 р.

THE NONLINEAR VIBROMACHINES, SUPERHARMONIC RESONANCES AND POLYHARMONIC VIBRATIONS

Belovodskiy V.N., Sukhorukov M.I. *(DonNTU, Donetsk, Ukraine)*

The vibromachines of one mass scheme with harmonic excitation and the polynomial characteristic of restoring force are considered. The software for the solving of some problems of their dynamics, namely – the determination of amplitude-frequency characteristics, analyzing spectral and phase composition of the periodic regimes, the finding of their basins of attraction, is described. For certain values of the parameters analysis of oscillations in the zones of superharmonic resonances of order 2:1 and 3:1 is performed, the potential of such systems in the formation of polyharmonic vibrations is shown.

Key words: *vibromachine, superharmonic resonance, polyharmonic vibration, amplitude-frequency characteristic, spectral and phase composition of the periodic regimes, basin of attraction.*

НЕЛІНІЙНІ ВІБРОМАШИНИ, СУПЕРГАРМОНІЙНІ РЕЗОНАНСИ І ПОЛІГАРМОНІЧНІ ВІБРАЦІЇ

Бєловодський В.М., Сухоруков М.Ю. *(ДонНТУ, м. Донецьк, Україна)*

Розглядаються вібромашини одномассной схеми з гармонійним збудженням і поліноміальною характеристикою відновлюючої сили. Описується програмне забезпечення для вирішення окремих завдань задач динаміки машин, — побудови амплітудно-частотних характеристик, аналізу спектрального і фазового складу періодичних режимів, знаходження їх областей тяжіння. Для окремих співвідношень параметрів наводяться результати аналізу коливань в зонах збудження супергармонійних резонансів порядків 2:1 і 3:1, показані можливості таких систем в частині формування полігармонічних вібрацій.

Ключеві слова: *вібромашина, супергармонійний резонанс, полігармонічна вібрація, амплітудно-частотна характеристика, спектральний і фазовий склад періодичних режимів, область тяжіння.*