УДК 621.9

ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММ ОБРАБОТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ, ЗАДАННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИ, ДЛЯ СИСТЕМ ЧПУ С ЛИНЕЙНО – КРУГОВЫМ ИНТЕРПОЛЯТОРОМ

Проволоцкий А. Е., Лещенко А. И. (*ДМА, г. Днепропетровск, ПГТУ, г. Мариуполь, Украина*)

In the present work the mathematical algorithm of account of the programs for machine-tools with NC is offered, at the task of a trajectory of moving of the tool, as function of the valid argument. The created algorithm allows on the closed interval to replace, with the given error, smooth up to second by derivative a curve interfaced arches of circles having general to tangent in boundary points. The definition of an error will be coordinated to the methods, accepted in mechanical engineering, of the control.

Станки с ЧПУ, как правило, имеют только круговой и линейный интерполяторы. В машиностроении есть группы деталей, для которых образующие явно не определены прямыми или дугами окружностей, а заданы в виде функции действительного аргумента или группой точек, определяющей интерполяционный полином. Вместе с тем существует широкий перечень деталей, для которых точность соответствия теоретическому профилю имеет прямую зависимость с выходными параметрами изделия. К таким деталям можно отнести концентраторы колебаний для систем ультразвуковой обработки, сопла струйных систем, пресс-формы параболических антенн и пр. Кроме этого в ряде случаев оптимальная траектория формообразования соответствует уравнению второй степени или трансцендентному уравнению. Поэтому возникает задача линейно - круговой аппроксимации аналитически заданной траектории перемещения инструмента.

Современные САП уделяют внимание этому вопросу и дают пользователю инструментарий, основанный на теории приближения функций [1]. Например, сплайн - аппроксимация (наиболее широкое применение нашли кубические или В-сплайны), начинавшая свой путь как математическая формализация идей дизайнеров. Сплайн определяет сглаженную кривую, для которой заданные точки фактически управляют формой кривой, но гарантированно принадлежат ей только на концах отрезка аппроксимации. Метод Безье, принимая за основу дискретно заданные «управляющие точки», предлагает математическое описание кривых, заданных графически. Метод наименьших квадратов, основанный на минимизации расстояний от точек аппроксимирующей кривой, до точек данных хорошо зарекомендовал себя для обработки экспериментальных данных, однако выход отдельных точек образующей детали за пределы среднеквадратичного может быть причиной ее непригодности.

Рис. 1. Контроль в сечении профиля с прямолинейной образующей

Такие методы, расчета линейно - круговой интерполяции лекальных профилей не связаны с основным показателем точности, принятым в машиностроении - числовым значением предельного отклонения на полученный

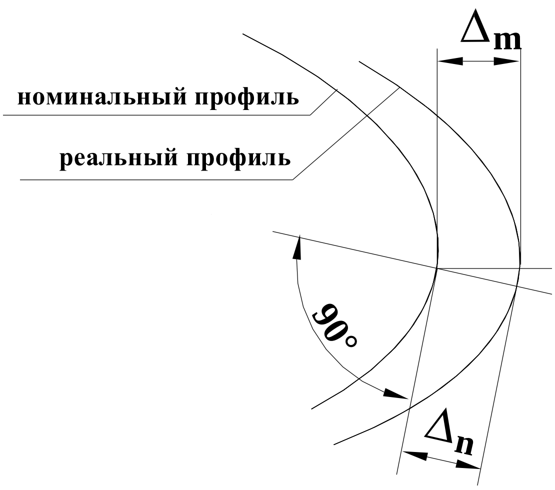

Рис. 2. Контроль в сечении профиля с криволинейной образующей

размер.

В машиностроении, целью контроля геометрических параметров детали является получение размеров однозначно определяю-щих форму одной поверхности или звеньев размерной цепи задающей взаимное положение нескольких поверхностей, в координатной системе связанной с измерительной базой. Если измерительной базой является плоскость (номинальный профиль) то расстояние, (рис.1) измеренное по нормали Δ_n до реального профиля и предельное отклонение формы (например, максимальный зазор между профилем шаблона и реальной поверхностью) – равные величины.

Для поверхностей с криволинейными образующими ГОСТ 24642-81 [2] определяет отклонение формы заданного профиля, как наибольшее отклонение точек реального профиля от номинального профиля, по нормали к номинальному профилю. Такое определение дает неоднозначность измерений при контроле фасонной поверхности, т. к. при определенных соотношениях кривизны образующей расстояние по нормали Δ_n (рис.2) между точкой номинального профиля и реальным профилем будет меньше чем расстояние Δ_m, измеренное калиброванной проволочкой, как максимальный зазор.

Наиболее точные данные измерений формы обработанной поверхности можно получить на контрольно - измерительных машинах [3] (фирмы производители Renishaw, FARO Technologies Inc.), однако работа с ними требует точной математической формализации понятия допустимого отклонения формы теоретического профиля от полученного в процессе обработки.

Необходимость оценки близости исходной функции и функции аппроксимации требует получения аналитической зависимости определяющей погрешность круговой аппроксимации, под которой будем понимать максимальный диаметр окружности касающейся дуги аппроксимации и заданной кривой. Такое определение погрешности согласуется с принятым в машиностроении методам контроля калиброванной проволочкой зазора, между профилем шаблона (номинальный контур) и образующей детали.

На рис. 3 представлена схема расчета круговой аппроксимации участка монотонной кривой $y = f(x)$ дугой $\overline{R}_B(t) = R \cdot \cos(t) \cdot \overline{i} + R \cdot \sin(t) \cdot \overline{j}$, где R радиус дуги аппроксимации, а t – угловая координата. Оценку качества аппроксимации определяет «вписанная окружность», т. е. окружность с максимальным радиусом $r_{\max}$, касающаяся заданной кривой и дуги окружности аппроксимации.

Для произвольной точки кривой $A(x_a, y_a)$ с вектором нормали $\overline{N}_A$ погрешность аппроксимации рассчитывается путем решения системы векторных уравнений относительно угловой координаты t:

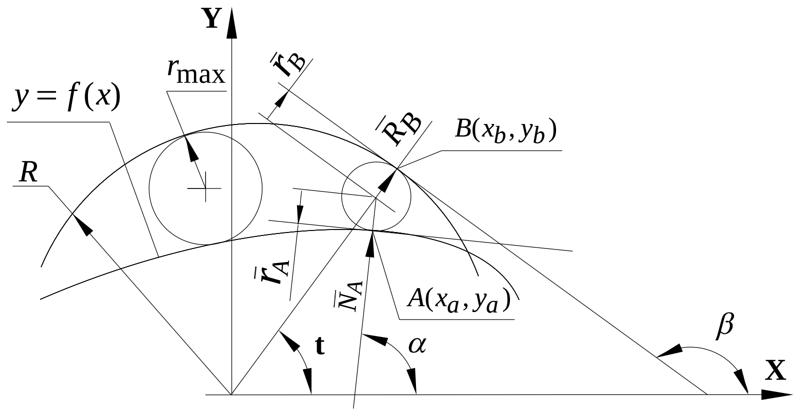

Рис. 3. Аппроксимации функции $y = f(x)$ дугой окружности радиуса R с погрешностью $r_{\max}$

$$\begin{cases} \left|\bar{r}_A(t)\right| = \left|\bar{r}_B(t)\right| \\ t + \arccos\left(\dfrac{\bar{R}_B(t)\cdot \bar{N}_A}{\left|\bar{R}_B\right|\cdot\left|\bar{N}_A\right|}\right) = arctg\left(-\dfrac{1}{\dfrac{d}{dx}f(x)}\right) \end{cases}$$

Значение угловой координаты t определяет точку касания $B(x_b, y_b)$ вписанной окружности радиуса $\left|\bar{r}_B\right|$ для которой угол наклона касательной $tg(\beta) = \dfrac{d}{dt}\bar{R}_B(t)$. Для определения максимального значения погрешности, т. е. вписанной окружности с максимальным радиусом, следует искать точку с минимальным значением функции

$$F_{\min}(x,t) = \left|\frac{d}{dx}f(x_i) - \frac{d}{dt}\bar{R}(t_i)\right|, \tag{1}$$

когда векторы $\bar{R}_B(t)$ и $\bar{r}_A$ наиболее близки к коллинеарному признаку.

Рассмотрим структуру математического расчета аппроксимации кривых с монотонным изменением кривизны, сопрягающимися дугами окружностей. Алгоритм, созданный по этому принципам данной структуры позволяет на замкнутом интервале заменить, с погрешностью, не превышающей $r_{\max}$, гладкую до второй производной кривую, участками дуг окружностей имеющих общую касательную в граничных точках.

Широкий спектр математических функций, затрудняет построение общей теории решения этой задачи, поэтому ограничим траекторию перемещения уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_n]$ дважды дифференцируемая, монотонно изменяющаяся функция, не имеющая точек перегиба, т.е. соблюдается условие:

$$\frac{d^2\varphi(x_n)}{dx^2} > 0 \text{ или } \frac{d^2\varphi(x_n)}{dx^2} < 0 \text{ но } \frac{d^2\varphi(x_n)}{dx^2} \neq 0.$$

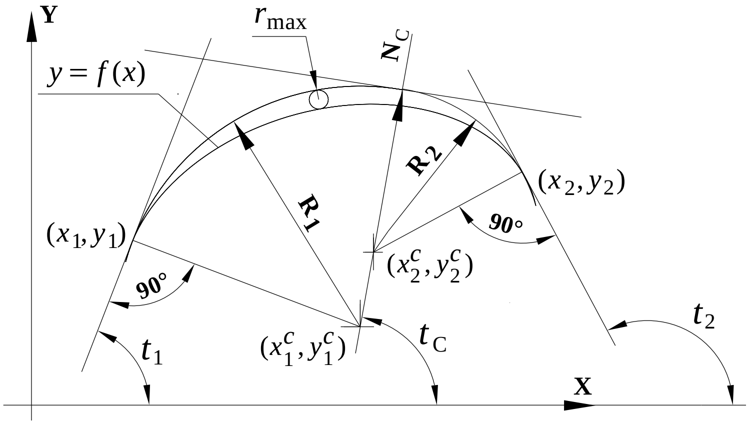

Рис. 4. Круговая аппроксимация функции $y = f(x)$ на замкнутом интервале $[x_1, x_2]$. t_1, t_2 - углы наклона касательных в граничных точках интервала; R_1, R_2 - радиусы сопряженных дуг аппроксимации с центрами в точках $(x_1^c, y_1^c), (x_2^c, y_2^c)$, с общей нормалью N_C и касательной в точке с угловой координатой t_C; $r_{\max}$ - погрешность круговой аппроксимации

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Для монотонной (рис. 4) на замкнутом интервале $[x_1, x_2]$ функции $y = f(x)$, необходимо методом круговой аппроксимации получить ее приближенное представление, с погрешностью не превышающей $r_{\max}$.

В качестве исходных данных круговой аппроксимации функции $y = f(x)$ заданы:

- граничные точки интервала (x_1, y_1) (x_2, y_2);

- значения первых производных, которые определяют касательные в этих точках - $\frac{d}{dx} f(x_1), \frac{d}{dx} f(x_2)$ и значение вторых производных $\frac{d^2}{dx^2} f(x_1), \frac{d^2}{dx^2} f(x_2)$.

Построить дугу окружности, проходящую через две точки, с заданными углами наклона касательных в этих точках, можно при условии:

$$\frac{\frac{d}{dx} f(x_1) - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{1 + \frac{d}{dx} f(x1) \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} + \frac{\frac{d}{dx} f(x_2) - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{1 + \frac{d}{dx} f(x2) \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} = 0$$

Это условие выполняется только при наличии оси симметрии графика функции, как частный случай условие выполняется для дуги окружности.

В общем случае на заданном интервале, круговая аппроксимация функции с указанным свойством монотонности может быть выполнена двумя сопряженными дугами - R_1 и R_2, с центрами в точках $(x_1^c, y_1^c), (x_2^c, y_2^c)$ соответственно, имеющими в одной из точек интервала общую нормаль N_C и касательную. Если радиусы дуг определить, как функции:

$$R_1(x_1^c, y_1^c) = \sqrt{(x_1 - x_1^c)^2 + (y_1 - y_1^c)^2}\,; \quad R_2(x_2^c, y_2^c) = \sqrt{(x_2 - x_2^c)^2 + (y_2 - y_{21}^c)^2}\,,$$

то заданное условие задачи даст систему четырех уравнений (2)

$$\begin{cases} R_1(x_1^c, y_1^c)\cdot\sin(t_C) + y_1^c - R_2(x_2^c, y_2^c)\cdot\sin(t_C) - y_2^c = 0 \\ R_1(x_1^c, y_1^c)\cdot\cos(t_C) + y_1^c - R_2(x_2^c, y_2^c)\cdot\cos(t_C) - y_2^c = 0 \\ \dfrac{y_1 - y_1^c}{x_1 - x_1^c} = -\dfrac{1}{\dfrac{d}{dx}f(x_1)} = -\dfrac{1}{tg(t_1)} = -ctg(t_1) \\ \dfrac{y_2 - y_2^c}{x_2 - x_2^c} = -\dfrac{1}{\dfrac{d}{dx}f(x_2)} = -\dfrac{1}{tg(t_2)} = -ctg(t_2) \end{cases}, \qquad (2)$$

с пятью неизвестными: $(x_1^c, y_1^c), (x_2^c, y_2^c)$, t_C – где угловой параметр вектора нормали N_C определяющий точку сопряжения дуг окружностей.

Решение данной системы дает функциональную зависимость $R_1(t_C)$ и $R_2(t_C)$.

Следовательно, при изменении t_C можно получить различные варианты сопряженных дуг обеспечивающих круговую аппроксимацию функции $y = f(x)$ на интервале $[x_1, x_2]$. При этом в зависимости от точки касания сопрягаемых дуг, определенной угловой координатой t_C, будут изменяться значения радиусов сопряжения $R_1(t_C), R_2(t_C)$.

В качестве инструмента для расчета алгоритма определения интервалов круговой аппроксимации заданной кривой применяются следующие геометрические свойства сопряжения, которые в данной работе приводятся без доказательства.

1. При уменьшении ширины интервала, т. е. когда $x_2 \to x_1$, значение угловой координаты $t_C \to t_1$

2. Для монотонной на замкнутом интервале $[x_1, x_2]$ функции $y = f(x)$ максималь-ная погрешность круговой аппроксимации $r_{\max}$ определяет точка, с угловой коор-динатой:

$$t_C^{\max} = -arcctg\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right).$$

Последовательным вычислением целевой функции (1) определяем параметры сопряженных дуг окружностей.

Монотонно изменяющуюся кривую $y = f(x)$ можно аппроксимировать «хордами» [4] на интервалах $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots [x_{n-1}, x_n]$ так, чтобы полученная при этом ломаная, заменила аппроксимируемую функцию с погрешностью $\Delta = \sigma \cdot \delta$, где δ - числовое значение допуска; σ<1 – коэффициент, учитывающий поле рассеяния размеров относительно предельных значений поля допуска. На такой основе была получена методом линейной аппроксимации, программа обработки детали -

эллипсоида вращения (6), на токарном станке с УЧПУ МС2101.05. Контроль отклонение формы от теоретического профиля дал результаты измерений в пределах допуска, однако на поверхности детали, в местах сопряжения линейных отрезков были заметны риски - следствие цикла разгона-торможения при отработке УЧПУ станка кадров программы. Включение в программу функции блокировки переходных процессов при отработке линейных перемещений дает возможность убрать с обработанной поверхности следы разделения кадров программы, однако приводит к снижению геометрической точности поверхности, что особенно заметно на участках с меньшей кривизной и соответственно меньшими длинами линейных отрезков аппроксимации. Причиной этой ошибки является перебег при позиционировании в конце кадра, появление которого связано со скачкообразного изменением направления вектора подачи [5].

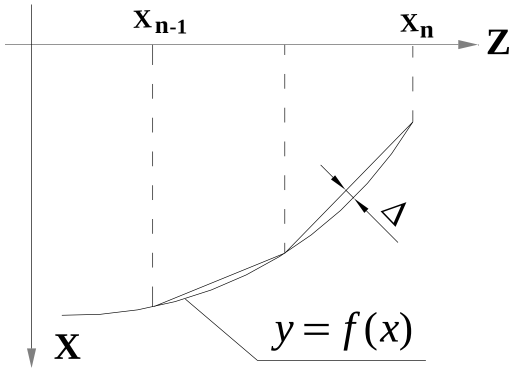

Рис. 5. Линейная аппроксимация кривой $y=\varphi(x)$ с погрешностью Δ

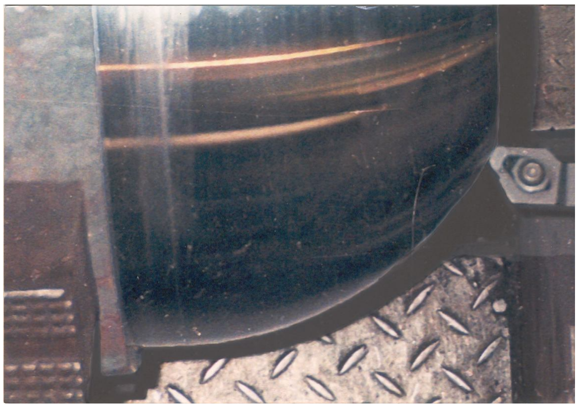

Рис. 6. Обработка фасонной поверхности

Предлагаемый метод круговой аппроксимации исключает этот недостаток и позволяет работать с качественно иными показателями динамических характеристик программных перемещений. Поэтому поверхность эллипсоида, обработанная по программе рассчитанной методам круговой аппроксимации, имеет значительно меньше отклонение реального профиля от номинального значения, чем при линейной аппроксимации.

ВЫВОДЫ. На сегодняшний день, многие публикации анализируют вопросы использования высокоточной интерполяции NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) сложно - профильных поверхностей, которая по существу является компромиссом между объемом данный и получаемой точностью. Программист, работая по этой технологии создания управляющих программ, по сути, интуитивно должен установить параметры интерполяции, чтобы обеспечить требуемую точность обработки поверхности.

Предлагаемый метод круговой интерполяции повышает точность за счет строгой формализации предельного значения погрешности круговой аппроксимации, при этом сохраняются законы сопряжение элементов программируемой траектории как внутри интервала аппроксимации, так и на его границах. Такой подход гарантирует не только кинематическую точность формообразования, но и обеспечивает комфортный режим работы для динамической системы управления приводами.

Следует отметить, что приведенное в данной работе понятие формализация погрешности $r_{\max}$ может служить основой для алгоритмов контроля поверхностей различного типа на координатно-измерительных машинах (КИМ).

Для современных систем ЧПУ, расширение оперативной памяти позволяет перейти к параметризированному процедурному программированию - фактически программированию языком подпрограмм. Если образующую фасонной поверхности, заданную как функцию действительного аргумента представить как «объект класса», то созданную подпрограмма круговой аппроксимации можно включить в «методы класса», позволяющие корректировать возникающие погрешности обработки. Такой подход соответствует современному стилю созданию программ – объектно-ориентированному программированию

Список литературы: **1.** Квасов Б.И. Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. – М.: Физматлит, 2006. - 326 с. **2.** Допуски формы и расположения поверхностей. Основные термины и определения. ГОСТ 24642-81, М. 1981. – 70 с. **3**. Probing systems for co-ordinate measuring machines. United Kingdom: Renishaw plc, 2003. – 73 с. **4.** Лещенко А.И. Формообразование поверхностей переменной кривизны заданных аналитически, линейно – круговым интерполятором СЧПУ. // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Международный сборник научных трудов. – Донецк: ДонГТУ, 2001. – Вып. 17. - С. 23 -27. **5.** Ратмиров В.А. Чурин И.Н. Шмутер С.Л. Повышение точности и производительности станков с программным управлением. – М.: Машиностроение, 1986. – 290 с.

Надійшла до редколегії 12.03.2009 р.

ПОСТРОЕНИЕ ПРОГРАММ ОБРАБОТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ, ЗАДАННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИ, ДЛЯ СИСТЕМ ЧПУ С ЛИНЕЙНО – КРУГОВЫМ ИНТЕРПОЛЯТОРОМ

Проволоцкий А. Е., Лещенко А. И.

У роботі пропонується метод кругової інтерполяції, який підвищує точність за рахунок строгої формалізації граничного значення похибки кругової апроксимації, при цьому зберігаються закони сполучення елементів програмованої траєкторії як усередині інтервалу апроксимації, так і на його кордонах.

программа обработки, линейно-круговой интерполятор, система ЧПУ, фасонная поверхность