АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ РЕЗАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЯПУНОВА

Чернышев Е.А. *(ДонНТУ, г. Донецк, Украина)*

The paper deals with dynamic stability analysis of a metal-working machine using Lyapunov's stability theory. There have been shown how to carry out stability analysis on the base of Lyapunov's theory provided the machine is autonomic one, i.e. it is considered not to depend obviously on time. This method permits to determine influence cutting regimes on dynamic stability.

Введение.

Обеспечение динамической устойчивости систем обработки резанием является актуальной практической задачей, призванной повысить качество обработки и эксплуатационные характеристики оборудования. По этой причине изучение вопроса динамической устойчивости систем механической обработки остается важной задачей. Существенным свойством любой динамической системы, а тем более такой сложной нелинейной системы, как система резания, есть ее нестационарность, т.е. не только свойство количественной переменности некоторых характеристик (например, малых перемещений в колебательном движении), но и свойство качественного непостоянства самого колебательного режима. Подобные процессы характерны для очень широкого класса систем [1, 2], в том числе механических [3], в частности систем резания [4-6]. Динамическое качество станков существенно влияет не только на результат обработки, но и на надежность станка в целом [7-8].

Задача динамической устойчивости решается многими исследователями. В классических работах [9-11] учитывается «координатная связь» станка – влияние колебаний на мгновенные режимы резания. Получены важные зависимости влияния на границу устойчивости различных параметров системы, в том числе номинальных режимов резания. Эти результаты позволяют назначать режимы резания, исходя из их влияния на устойчивость. Однако полученные зависимости не лишены отдельных недостатков, что, впрочем, объясняется высокой сложностью процессов, протекающих при резании, и, следовательно, сложностью математической модели. В работах [9-11] математические модели имеют принципиальное свойство линейности, которое редко присуще реальным системам и появляется обычно в результате идеализации. Также дискуссионным является допущение о синусоидальной зависимости силы резания от времени. В работе [4] сила резания тоже явно зависит от времени, но принята периодической разрывной функцией с периодом, равным промежутку времени между двумя последовательными сколами стружки. С учетом этого свойства получена карта динамической устойчивости, но так как одним из факторов является частота стружкообразования, которую очень сложно контролировать практически, то результат, представляя несомненный теоретический интерес, имеет некоторое ограничение по его практическому применению.

Более рациональным, по мнению автора, является подход, более удобный в практическом использовании. Такая постановка задачи требует одновременно учета наиболее важных свойств динамической системы резания и в то же время – простоты использования результатов анализа. Однако до настоящего времени нет единого подхода к решению этой задачи. В связи с этим ставится следующая **цель работы** – формирование общего подхода к анализу динамической устойчивости системы резания с использованием теории устойчивости Ляпунова. Для этого предполагается решить следующие задачи: 1) представить в общем виде методику анализа устойчивости системы резания по Ляпунову и 2) на примере частного случая упрощенной системы резания исследовать вопрос об ее устойчивости.

Основное содержание и результаты работы.

Первым и ключевым допущением предлагаемого подхода является *гипотеза об автономности системы резания*. Будем считать, что в идеальной системе резания, т.е. при отсутствии любых случайных возмущений, сила резания не зависит от времени, а изменяется только благодаря зависимости мгновенных значений режимов от малых перемещений инструмента и заготовки. Из этой гипотезы следует, что при затухании колебаний сила резания стремится к некоторому *стационарному* значению. Далее, будем считать, что это стационарное значение силы резания есть ее *среднее* значение, и его можно вычислить на основании известных эмпирических зависимостей [12], которые верны в некотором интервале входных переменных. Из сделанных посылок следует, что в этом интервале входных переменных, в частности режимов резания, для анализа динамической устойчивости применима теория устойчивости Ляпунова, поскольку она применима вообще к любым автономным системам.

Еще проф. Вышнеградский И.А. в 1876 г. предположил, что свойства системы в отношении устойчивости установившегося ее движения обнаруживаются уже в тех малых возмущенных движениях, которые возникают около невозмущенного движения в течение небольшого промежутка времени вслед за моментом сообщения системе достаточно малого начального возмущения. Позже общая задача об устойчивости движения была решена А.М. Ляпуновым [13], им же выяснены условия, при которых первое приближение действительно решает вопрос об устойчивости.

Обратимся к использованию теории Ляпунова применительно к поставленной задаче. Запишем в матричной форме уравнение динамики абстрактной системы резания:

$$M\ddot{X} + H\dot{X} + CX = P\left(X, \dot{X}\right), \tag{1}$$

где M, H, C – матрицы инерционных, диссипативных и жесткостных коэффициентов соответственно; $X, \dot{X}, \ddot{X}$ - матрицы малых перемещений, их первых и вторых производных соответственно; $P\left(X, \dot{X}\right)$ - матрица-столбец сил резания.

В соответствии с теоремой Ляпунова о неустойчивости по первому приближению [13, 14] правомерно заключение об устойчивости на основе линеаризованной системы, независимо от членов выше первого порядка. После линеаризации системы (1) сообщим ей малые возмущения и запишем линеаризованное уравнение в вариациях:

$$M \cdot \delta\ddot{X} + \overline{H} \cdot \delta\dot{X} + \overline{C} \cdot \delta X = 0, \tag{2}$$

где $\overline{H}, \overline{C}$ - преобразованные матрицы диссипативных и жесткостных коэффициентов, содержащие номинальные режимы резания и другие характеристики, присутствующие в формуле силы резания;

$\delta X, \delta\dot{X}, \delta\ddot{X}$ - матрицы вариаций искомых перемещений, их первых и вторых производных.

Система (2) описывает свободные колебания. В этом заключается сущность подхода – анализируются малые возмущения, сообщенные системе, которая затем предоставлена самой себе. Приведем в соответствие каждому собственному числу λ_j системы

(2) собственный вектор A_j, удовлетворяющий системе однородных алгебраических уравнений

$$\left(\lambda^2\bar{M}+\lambda_j\bar{H}+\bar{C}\right)A_j=0 \tag{3}$$

из условия

$$\delta X = A_j \exp\left(\lambda_j t\right).$$

Нетривиальное решение системы (3) существует, если

$$\det\left(\lambda^2\bar{M}+\lambda\bar{H}+\bar{C}\right)=0\,. \tag{4}$$

Тогда устойчивость системы (2) зависит от знаков собственных чисел характеристического уравнения (4). Если все они отрицательны, то малые возмущения затухают и система (1) устойчива. Если же среди корней характеристического уравнения есть по крайней мере один с положительной вещественной частью, то возмущенное движение неустойчиво. Значит, условие устойчивости системы резания:

$$\max\left[\mathrm{Re}\left(\lambda_j\right)\right]<0\,,$$

а условие перехода в неустойчивое состояние состоит в том, что наибольшая вещественная часть из всех собственных чисел переходит из области отрицательных чисел в область положительных.

Рассмотрим пример анализа устойчивости системы резания при точении. Предположим, что система состоит из двух приведенных масс - заготовки и инструмента и совершает только тангенциальные колебания. Силу резания будем считать заданной известной эмпирической зависимостью [12]. Направив ось z вниз, запишем уравнения динамики тангенциальных колебаний принятой системы резания:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{z}_1+f_{11}\left(\dot{z}_1\right)+f_{12}\left(z_1\right)&=10C_p\,t^x s^y\left[V\left(\dot{z}_1,\dot{z}_2\right)\right]^n K_p,\\ m_2\ddot{z}_2+f_{21}\left(\dot{z}_2\right)+f_{22}\left(z_2\right)&=-10C_p\,t^x s^y\left[V\left(\dot{z}_1,\dot{z}_2\right)\right]^n K_p,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где m – приведенная масса; $z, \dot{z}$ - малое касательное перемещение и его скорость соответственно (индексы относятся: 1 – к инструменту, 2 – к заготовке); $f_{11}\left(\dot{z}_1\right),\ f_{12}\left(z_1\right),\ f_{21}\left(\dot{z}_2\right),\ f_{22}\left(z_2\right)$ - некоторые функции малых перемещений и их первых производных; C_p, K_p, x, y, n - эмпирические постоянные, учитывающие условия обработки; t, s, V - номинальные глубина резания (мм), подача (мм/об) и скорость резания (м/мин) соответственно.

Мгновенное значение силы резания зависит от первых производных малых тангенциальных перемещений инструмента и заготовки в их колебательном движении следующим образом:

$$P_z=k\left(V-\dot{z}_1+\dot{z}_2\right)^n, \tag{6}$$

где

$$k = 10 C_p t^x s^y 60^n, \tag{7}$$

а скорость резания измеряется в м/с.

Предположим, что резание осуществляется непрерывно и в любой момент времени $\dot{z}_1 + \dot{z}_2 < V$. Это допущение вполне правомерно в силу того, что неустойчивость, если она действительно имеет место, обнаруживаются уже в *малых* возмущенных движениях. В процессе развития неустойчивости на каком-то этапе произойдет прерывание резания, в силу чего система перейдет в режим свободных колебаний (этот механизм можно рассматривать как причину возникновения автоколебаний). Но так как в данной работе ставится задача *обнаружения* неустойчивого режима, то условие $\dot{z}_1 + \dot{z}_2 < V$ не противоречит поставленной задаче. Итак, линеаризуя левую часть системы (5), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{z}_1 + h_1\dot{z}_1 + C_1 z_1 &= k\left(V - \dot{z}_1 + \dot{z}_2\right)^n, \\ m_2\ddot{z}_2 + h_2\dot{z}_2 + C_2 z_2 &= -k\left(V - \dot{z}_1 + \dot{z}_2\right)^n, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где h, C - коэффициенты вязкого трения и жесткости соответственно.

Наконец, линеаризуем правую часть системы (8) и запишем уравнение в вариациях в матричной форме:

$$M \cdot \delta\ddot{Z} + \bar{H} \cdot \delta\dot{Z} + \bar{C} \cdot \delta Z = 0, \tag{9}$$

где введены следующие матрицы:

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{H} = \begin{pmatrix} h_1 + k\,nV^{n-1} & -k\,nV^{n-1} \\ -k\,nV^{n-1} & h_2 + k\,nV^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix},$$

$$\delta Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \delta\dot{Z} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix}, \quad \delta\ddot{Z} = \begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай чернового наружного продольного точения конструкционных сталей твердосплавным инструментом с глубиной резания 1,5 мм и подачей 0,4 мм/об при следующих геометрических параметрах инструмента и свойствах материала: предел прочности 750 МПа, радиус при вершине резца 1 мм, $\gamma = 10^\circ$, $\varphi = 45^\circ$, $\lambda = 0^\circ$, так что $K_p = 1$. Подставив эти значения в (7), получим, что в данном случае $k = 2263$. Считая диссипативные коэффициенты $h_1 = h_2 = h$, запишем в развернутом виде характеристическое уравнение системы (9):

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4 = 0, \tag{10}$$

где

$$a_0 = C_1 C_2,$$
$$a_1 = (C_1 + C_2)\left(h + k\,n V^{n-1}\right),$$
$$a_2 = C_1 m_2 + C_2 m_1 + h^2 + 2h\,k\,n V^{n-1},$$
$$a_3 = (m_1 + m_2)\left(h + k\,n V^{n-1}\right),$$
$$a_4 = m_1 m_2.$$

Очевидно, что уравнение (10) имеет четыре корня, вообще говоря, комплексных. Произведем расчет на устойчивость из условий: $m_1 = m_2 = 1$ кг, $C_1 = 10^7$ Н/м, $C_2 = 5\cdot 10^6$ Н/м. Будем искать такую критическую величину $h_{кр}$ вязкого трения, при которой наибольшая вещественная часть становится равной нулю. На рис. 1 показан график зависимости границы устойчивости для выбранных параметров. Область под кривой является областью неустойчивости, т.к. диссипация в системе меньше минимально необходимой. С увеличением скорости резания $h_{кр}$ уменьшается асимптотически.

Рис. 1. Зависимость границы динамической устойчивости от номинальной скорости резания

Если аппроксимировать эту кривую степенной зависимостью, то с коэффициентом корреляции не менее 0,99 величина $h_{кр}$ пропорциональна $V^{-1{,}15} = V^{n-1}$. При других режимах резания наблюдается то же свойство, а коэффициент пропорциональности изменяется пропорционально изменению k (7). На этом основании в классических работах [9-11] об устойчивости судится из условия положительности коэффициента при первой производной. Это верно для единственного уравнения динамики как решение частного случая уравнения (4), когда каждая матрица представима одним членом. В случае двух и более степеней свободы необходимо решать развернутое характеристическое уравнение. Рассмотренный пример дает такую простую зависимость еще потому, что из всех режимов резания в данном случае только скорость считается зависящей от малых колебаний. Так как в действительности глубина и подача также изменяются под воздействием колебаний, то в случае учета радиальных, осевых и крутильных колебаний картина усложняется. Тем не менее общий подход к анализу устойчивости не изменяется и на основе известных инженерных зависимостей сил резания открывает некоторые неиспользованные возможности.

В результате решения уравнения (10) можно заметить еще одно свойство. Так как мнимые части собственных чисел есть не что иное, как собственные частоты линеаризованной системы, то они в сравнении с частотами линейной системы могут служить некоторой оценкой нелинейных свойств системы резания. Для рассмотренного примера частоты различаются несущественно: на границе устойчивости для инструмента и заготовки – на 0,03%. С «увеличением» неустойчивости эта разница возрастает.

Выводы.

В работе предложен подход к анализу динамической устойчивости системы резания с использованием теории устойчивости Ляпунова. На основании проведенных теоретических исследований можно сделать следующие выводы:

1. Для анализа устойчивости системы резания по Ляпунову необходимо иметь зависимость влияния режимов на силу резания и формулу ее расчета. После линеаризации и перехода к вариациям заключение об устойчивости делается по знаку наибольшей вещественной части из всех корней характеристического уравнения.

2. Для двухмассовой системы резания, совершающей только тангенциальные колебания, критическая величина вязкого трения пропорциональна V^{n-1}, где n – показатель степени в формуле силы резания. На границе устойчивости собственные частоты системы несущественно отличаются от собственных частот линейной системы.

Таким образом, теория устойчивости Ляпунова применима к автономным системам резания и позволяет прогнозировать устойчивость, исходя из инженерных зависимостей для расчета сил резания.

Список литературы: **1.** Симо К., Смейл С., Шенсине А. и др. Современные проблемы хаоса и нелинейности. - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. - 304 с. **2.** Мун Ф. Хаотические колебания: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 312 с. **3.** Беломытцев А.С., Ларин А.А. Хаотические колебания периодически возбуждаемой механической системы // Известия вузов, Машиностроение. - 1990. - №3. - С. 31 – 34. **4.** Кабалдин Ю.Г., Биленко С.В., Саблин П.А. Математическое моделирование динамической устойчивости системы резания в виде нелинейного осциллятора с разрывными характеристиками // Вестник машиностроения. – 2006. - №10. - С. 35 – 43. **5.** Кабалдин Ю.Г., Биленко С.В., Серый С.В. Исследование детерминированного хаоса в динамике процессов механообработки методом реконструкции аттрактора // Вестник машиностроения. – 2003. - №1. **6.** Кабалдин Ю.Г., Серый С.В., Бурдасов Е.Н. Моделирование динамики процесса резания на основе фрактального и вэйвлет-анализа // Вестник машиностроения. – 2006. - №11. - С. 37– 44. **7.** Оборский Г.А. Связь динамической устойчивости технологических систем с их надежностью // Тр. Одес. политех. ун-та. – О., 2001. – Вып. 4 (16). – С. 25-28. **8.** Оборский Г.А. Методы управления надежностью технологических систем по параметру «динамическая устойчивость» // Високі технології в машинобудуванні: зб. наук. пр. Харьк. держ. політех. ун-та. – Х., 2002. – Вип. 1(6). - 288 - 292. **9.** Кудинов В.А. Динамика станков. – М.: Машиностроение, 1967. – 368 с. **10.** Кедров С.С. Колебания металлорежущих станков. – М.: Машиностроение, 1978. – 200 с. **11.** Орликов М.Л. Динамика станков. – К.: Вища шк., 1989. – 320 с. **12.** Справочник технолога-машиностроителя. В 2-х т. / Под ред. А.Г. Косиловой и Р.К. Мещерякова. – М.: Машиностроение, 1986. – Т.2. **13.** Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950. – 462 с. **14.** Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.

Сдано в редакцию 15.01.2009