ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Симонян С.О., Аветисян А.Г., Казарян Д.А. (*ГИУА, г. Ереван, Армения*)

Linear speed problems with partially fixed boundary conditions and control influence vector are considered, for the solution of which Pukhov's differential transformations serve as a main mathematical apparatus. The considered linear speed problem reduced to the static nonlinear programming problem.

Введение. Рассмотрим следующую линейную задачу оптимального быстродействия с частично закрепленными краевыми условиями на левом конце [1-5]

$$I = \int_0^T 1dt = T \to \min_{U(t)} \;, \tag{1}$$

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \;, \tag{2}$$

$$X(0) = ?\,, X(T) = fix\,, \tag{3}$$

$$|u_k(t)| \le 1\,,\; k = \overline{1,r}, \tag{4}$$

где (1)-критерий качества, (2)-система уравнений движения, (3)-частично закрепленные краевые условия (заметим, что хотя бы одна координата на левом конце оптимальных траекторий должна быть закреплена, в противном случае задача оптимального быстродействия лишается смысла), (4)-амплитудные ограничения на управляющие переменные, $A = (a_{ij}), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$-постоянная матрица переменных состояния с действительными отрицательными или нулевыми собственными числами λ_i, $i = \overline{1,n}$, $B = b_{jk}$, $j = \overline{1,n}, k = \overline{1,r}$-матрица управляющих переменных, $X(t) = (x_1(t),....,x_n(t))^T$ - n-мерный вектор переменных состояния, $U(t) = (u_1(t),\ldots,u_r(t))^T$ - r-мерный вектор управляющих переменных, $r \le n$, T-время перехода.

Для решения рассматриваемой задачи и нахождения неизвестных начальных значений переменных состояния в соответствии с принципом $\max$–а [1,3] необходимо использовать так называемые условия трансверсальности на левом конце оптимальных траекторий, в которых, как и в функциях управляющих переменных, участвуют подлежащие нахождению начальные значения вектора сопряженных переменных, по поводу определения которых принцип $\max$–а, к сожалению, никакой регулярной вычислительной процедуры не указывает, что с практической точки зрения приводит к серьезным затруднениям. Между тем, предлагаемый подход не нуждается ни в использовании начальных значений сопряженных переменных, ни в использовании условий трансверсальности, что достаточно упрощает решение рассматриваемой задачи. При этом в качестве основного математического аппарата используются дифференциальные преобразования Г.Е. Пухова [6], в частности, дифференциально-тейлоровские преобразования:

$$X(K) = \frac{H^k}{K!} \cdot \frac{\partial^K x(t)}{\partial t^k}\Big|_{t=t_\nu} \;, \quad K = \overline{0,\infty} \;\; \overline{\underline{\;\bullet\;}} \;\; x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t - t_\nu}{H}\right)^k X(K), \tag{5}$$

где $X(K)$ - изображение (дискрета) оригинала $x(t)$ (функция целочисленного аргумента $K=\overline{0,\infty}$); H - некоторая постоянная (масштабный коэффициент); t_v - центр аппроксимации.

<u>Предлагаемый подход.</u> Задачу (1)-(4) сначала решим как двухточечную краевую задачу с целью обеспечения выполнения краевых условий, а затем к полученной системе ограничений вида равенств добавим критерий качества (1) и ограничения вида (4). Тем самым придем к некоторой, эквивалентной к исходной, задаче нелинейного программирования. Далее, решение последней позволит находить все неизвестные значения и функции исходной задачи.

Теперь перейдем к рассмотрению предлагаемого подхода. Для решения двухточечной краевой задачи (2), (3) воспользуемся подходом, предложенном в работах [7,8]. Итак, спектральная модель системы (2) в области дифференциальных преобразований выглядит так:

$$\mathrm{X}(K+1)=\frac{\mathrm{H}}{K+1}\left(\sum_{P=0}^{K}\left[\mathrm{A}(P)\cdot\mathrm{X}(K-P)+B(P)\cdot U(K-P)\right]\right), K=0,1,\ldots, \quad (6)$$

где $X(K)=(X_1(K),...,X_n(K))^T$ –изображение вектора переменных состояния $X(t)=(x_1(t),....,x_n(t))^T$, $A(P)$ и $B(P)$- P-ые матричные дискреты матриц A и B соответсвенно.

Заметим, что $A(P=0)\equiv A, A(P\geq 1)=[0]$, а также $B(P=0)\equiv B, B(P\geq 1)=[0]$, что позволяет упростить (6). Окончательно будем иметь:

$$\mathrm{X}(K+1)=\frac{\mathrm{H}}{K+1}(\mathrm{A}\cdot\mathrm{X}(K)+B\cdot U(K)), K=0,1,\ldots. \quad (7)$$

Учитывая, что для рассматриваемого класса задач функция оптимального управления является кусочно-постоянной знакопеременной функцией (согласно хорошо известной в теории и практике оптимального управления теореме Фельдбаума [1,5]) и для каждой компоненты $u_k(t),\ k=\overline{1,r}$ вектора управления $U(t)$ число переключений не может превосходить $(n-1)$, то на интервале времени $[0,T]$ в общем случае будем иметь $r\cdot(n-1)+1$ подинтервалов $[0,t_1],[t_p,t_{p+1}], p=\overline{1,r\cdot(n-1)}$, и $[t_{r\cdot(n-1)},T]$, а количество времен переключений в общем случае будет равно $r\cdot(n-1)$.

Ввиду того, что на каждом подинтервале управляющее воздействие $u_k(t),\ k=\overline{1,r}$ постоянно, т.е.

$$u_{kp}(t)\equiv u_{kp}=\begin{Bmatrix}+1\\ \text{или}\\ -1\end{Bmatrix}=U_p(0),\ \ U_p(K\geq 1)\equiv 0,\ k=\overline{1,r}, p=\overline{1,r\cdot(n-1)+1}, \quad (8)$$

окончательно будем иметь

$$X(K+1)=\frac{H}{K+1}(A\cdot X(K)+B\cdot U(K)\text{Ъ}(K)),\ K=0,1,\ldots \quad (9)$$

или

$$X(K+1)=H^{K+1}\cdot[B_{K+1}\cdot X(0)+C_{K+1}(U(0))],\ K=0,1,\ldots, \quad (10)$$

где изображения-матрицы B_K, $K=0,1,\ldots$ и изображения-вектора $C_K(U(0))$, $K=0,1,\ldots$ определяются согласно следующим рекуррентным соотношениям [7-9]

$$B_{K+1}=\frac{1}{K+1}A\cdot B_K\ ,K=0,1,\ldots\ ,$$
$$C_{K+1}(U(0))=\frac{1}{K+1}\left(A\cdot C_K(U(0))+BU(K)\text{Ъ}(K)\right),K=0,1,\ldots, \tag{11}$$

где $B_0=E_{n\times n}$–единичная матрица порядка n, $C_0=(0)_{n\times 1}$ -нулевой вектор-столбец размера n, $\text{Ъ}(K)$-так называемая теда [6].

Для восстановления оригинала $X(t)$ применив обратное дифференциально-тейлоровское преобразование, будем иметь

$$X(t)=X(0)+X(1)(t-t_\upsilon)+X(2)(t-t_\upsilon)^2+\cdots+X(K)(t-t_\upsilon)^K=$$
$$=X(0)+(B_1X(0)+C_1)(t-t_\upsilon)+(B_2X(0)+C_2)(t-t_\upsilon)^2+\cdots+(B_KX(0)+C_K)(t-t_\upsilon)^K, \tag{12}$$

где $t\in[0,T]$, а t_υ–центр аппроксимации.

Таким образом, заменив исходную задачу на интервале времени $t\in[0,T]$ стыкующимися друг с другом $r\cdot(n-1)+1$ двухточечными краевыми задачами, для их решения можно применить предложенный в [7-9] работах подход. Учитывая, что для каждой последующей двухточечной краевой задачи левый конец является правым концом предыдущей двухточечной краевой задачи, для первого подинтервала будем иметь

$$\dot X(t)=A\cdot X(t)+B\cdot U_1\ ;$$
$$X(0)=(x_{10},x_{20},\ldots,x_{n0})^T,\ X(t_1)=(x_{11},x_{21},\ldots,x_{n1})^T, \tag{13}$$

где из n переменных состояния $x_i(t),i=\overline{1,n}$ хотя бы одна должна быть известной, т.е. $x_{i0}=fix,\ i\subset\overline{1,n}$.

Следовательно, для i–ого подинтервала будем иметь

$$\dot X(t)=A\cdot X(t)+B\cdot U_i\ ;$$
$$X(t_{i-1})=(x_{1,i-1},x_{2,i-1},\ldots,x_{n,i-1})^T,X(t_i)=(x_{1i},x_{2i},\ldots,x_{ni})^T, \tag{14}$$

и, аналогично, для $r\cdot(n-1)+1$–ого подинтервала

$$\dot X(t)=A\cdot X(t)+B\cdot U_{r\cdot(n-1)+1}\ ;$$
$$X\left(t_{r\cdot(n-1)}\right)=\left(x_{1,r\cdot(n-1)},x_{2,r\cdot(n-1)},\ldots,x_{n,r\cdot(n-1)}\right)^T,X(T)=fix. \tag{15}$$

Учитывая зависимости, полученные в результате решения предыдущих подзадач, будем иметь следующую систему n уравнений, которые, по существу будут выступать как ограничения вида равенств для задачи НЛП, обеспечивающие выполнение краевых условий исходной задачи:

$$\varphi_m\left(t_p,\ p=\overline{1,r(n-1)};\ T;\ u_{kp},\ k=\overline{1,r},p=\overline{1,r(n-1)};\ x_{i0},\ i=\overline{1,n}\right)-x_m(T)=0,\ m=\overline{1,n}. \tag{16}$$

Имея в виду теорему Фельдбаума, ограничения вида (4) представим эквивалентными им ограничениями вида равенств $u_{kp}^2-1=0,k=\overline{1,r},p=\overline{1,r\cdot(n-1)+1}$. Кроме того, полученной системе ограничений добавим ограничения вида $t_{p-1}-t_p\le 0,p=\overline{1,r(n-1)}$, $t_{r(n-1)}$ - $T\le 0,\ t_0=0$, редуцируемые из цепочки ограничений $0 \le t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_{r\cdot(n-1)} \le T$. Последние интервальные ограничения в виде неравенств в конечной задаче представим равенствами $t_{p-1} - t_p + v_p^2 = 0,\ p = \overline{1, r(n-1)},$ $t_{r(n-1)} - T + v_{r\cdot(n-1)+1}^2 = 0$. Тогда, получим следующую эквивалентную к исходной задачу НЛП:

$$T \to \min_{t_1,\ldots t_{r\cdot(n-1)+1}, T, u_{11}\ldots u_{1,r\cdot(n-1)+1}, u_{r1}\ldots u_{r,r\cdot(n-1)+1}, x_{10},\ldots,x_{n0}} \tag{17}$$

$$\varphi_m\left(t_p,\ p = \overline{1, r(n-1)};\ T;\ u_{kp},\ k = \overline{1,r}, p = \overline{1, r(n-1)};\ x_{i0},\ i = \overline{1,n}\right) - x_m(T) = 0,\ m = \overline{1,n}; \tag{18}$$

$$u_{kp}^2 - 1 = 0, k = \overline{1,r}, p = \overline{1, r\cdot(n-1)+1}, \tag{19}$$

$$t_{p-1} - t_p + v_p^2 = 0, p = \overline{1, r(n-1)},\ t_{r(n-1)} - T + v_{r\cdot(n-1)+1}^2 = 0\ , \tag{20}$$

где $v_p, p = \overline{1, r\cdot(n-1)+1}$ - дополнительные неизвестные, также подлежащие определению.

Решив эту лагранжеву задачу некоторым методом [10] , одновременно получим значения всех составляющих функции оптимального управления со своими моментами переключений, время минимального перехода, а также неизвестные значения переменных состояния и дополнительные постоянные. Далее, построение временных зависимостей переменных состояния и управляющих переменных не представит трудности.

Пример. Теперь рассмотрим следующую задачу линейного быстродействия с частично закрепленными левыми и полностью закрепленными правыми концами:

$$T \to \min_{u(t)},$$

$$\left\{\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ u_3(t)\end{pmatrix};\right.\ \left\{\begin{array}{ll}x_1(0) = -1, & x_1(T) = 0,\\ x_2(0) = x_{20} = ?, & x_2(T) = 0,\\ x_3(0) = x_{30} = ?; & x_3(T) = 0;\end{array}\right.$$

$$|u_k(t)| \le 1\ , k = \overline{1,3}.$$

Очевидно, что $\lambda_i = 0, \forall i = \overline{1,3},$ а матричные дискреты

$$A(0) = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\ A(K \ge 1) = [0];\ B(0) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, B(K \ge 1) = [0];$$

а также

$$B_1 = A(0) = \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}, B_2 = \frac{1}{2}(A(0)B_1 + A(1)) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, B_{\ge 3} = [0];$$

$$C_1 = B(0)U(0) = \begin{pmatrix}U_1(0)\\ U_2(0)\\ U_3(0)\end{pmatrix}, C_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}U_2(0)\\ U_3(0)\\ 0\end{pmatrix},\ C_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}U_3(0)\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\ , C_{\ge 4} = (0).$$

Для этой задачи, в общем случае, будем иметь $r\cdot(n-1)=6$ переключений, следовательно $r\cdot(n-1)+1=7$ подзадач и $r\cdot(r\cdot(n-1)+1)=3\cdot 7=21$ составляющих управляющих переменных.

Однако, не умаляя общности рассуждений, в конкретном случае нетрудно установить согласно принципу $\max$ –а, что эквивалентная задача НЛП в действительности содержит 3 момента переключений и одно T, т.е. будем иметь 4 подзадачи с 12-ю составляющими управляющих переменных.

Подзадача 1.

Имеем

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)+u_{11},\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)+u_{21},\\ \dot{x}_3(t)=u_{31}\ ;\end{cases}\quad X(0)_0=\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\x_3(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\x_{20}\\x_{30}\end{pmatrix},\ X(t_1)=\begin{pmatrix}x_1(t_1)\\x_2(t_1)\\x_3(t_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix}.$$

На подинтервале времени $[0,t_1]$ согласно (12)

$$X(t)=X(0)_0+(B_1X(0)_0+C_1)t+(B_2X(0)_0+C_2)t^2+(B_3X(0)_0+C_3)t^3+\cdots,$$

откуда при $t=t_1$ имеем следующую систему уравнений

$$X(t_1)=X(0)_0+(B_1X(0)_0+C_1)t_1+(B_2X(0)_0+C_2)t_1^2+(B_3X(0)_0+C_3)t_1^3+\cdots=(x_{11},x_{21},x_{31})^T$$

или, в явном виде

$$\begin{pmatrix}-1\\x_{20}\\x_{30}\end{pmatrix}+\left[\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\x_{20}\\x_{30}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_{11}\\u_{21}\\u_{31}\end{pmatrix}\right]t_1+\frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\x_{20}\\x_{30}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_{21}\\u_{31}\\0\end{pmatrix}\right]t_1^2+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}u_{31}\\0\\0\end{pmatrix}t_1^3=X(t_1)=\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases}-1+(x_{20}+u_{11})t_1+\frac{1}{2}(x_{30}+u_{21})t_1^2+\frac{1}{6}u_{31}t_1^3=x_{11},\\ x_{20}+(x_{30}+u_{21})t_1+\frac{1}{2}u_{31}t_1^2=x_{21},\\ x_{30}+u_{31}t_1=x_{31}.\end{cases}$$

Подзадача 2.

Имеем

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)+u_{12},\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)+u_{22},\\ \dot{x}_3(t)=u_{32}\ ;\end{cases}\quad X(0)_1=X(t_1)=\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\x_{31}\end{pmatrix},\quad X(t_2)=\begin{pmatrix}x_1(t_2)\\x_2(t_2)\\x_3(t_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{pmatrix}.$$

На подинтервале времени $[t_1,t_2]$ согласно (12)

$$X(t)=X(0)_1+(B_1X(0)_1+C_1)(t-t_1)+(B_2X(0)_1+C_2)(t-t_1)^2+$$
$$+(B_3X(0)_1+C_3)(t-t_1)^3+\cdots,$$

откуда при $t=t_2$ имеем следующую систему уравнений

$$X(t_2)=X(0)_1+(B_1X(0)_1+C_1)(t_2-t_1)+(B_2X(0)_1+C_2)(t_2-t_1)^2+$$
$$+(B_3X(0)_1+C_3)(t_2-t_1)^3+\cdots=(x_{12},x_{22},x_{32})^T$$

или, в явном виде

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} + \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{pmatrix} \right] (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{22} \\ u_{32} \\ 0 \end{pmatrix} \right] (t_2 - t_1)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} \begin{pmatrix} u_{32} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (t_2 - t_1)^3 = X(t_2) = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_{11} + (x_{21} + u_{12})(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}(x_{31} + u_{22})(t_2 - t_1)^2 + \frac{1}{6} u_{32}(t_2 - t_1)^3 = x_{12}, \\ x_{21} + (x_{31} + u_{22})(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} u_{32}(t_2 - t_1)^2 = x_{22}, \\ x_{31} + u_{32}(t_2 - t_1) = x_{32}. \end{cases}$$

Подзадача 3.

Имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_{13}, \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + u_{23}, \\ \dot{x}_3(t) = u_{33}; \end{cases} \quad X(0)_2 = X(t_2) = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}, \quad X(t_3) = \begin{pmatrix} x_1(t_3) \\ x_2(t_3) \\ x_3(t_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}.$$

На подинтервале времени $[t_2, t_3]$ согласно (12)

$$X(t) = X(0)_2 + (B_1 X(0)_2 + C_1)(t - t_2) + (B_2 X(0)_2 + C_2)(t - t_2)^2 +$$
$$+ (B_3 X(0)_2 + C_3)(t - t_2)^3 + \cdots,$$

откуда при $t = t_3$ имеем следующую систему уравнений

$$X(t_3) = X(0)_2 + (B_1 X(0)_2 + C_1)(t_3 - t_2) + (B_2 X(0)_1 + C_2)(t_3 - t_2)^2 +$$
$$+ (B_3 X(0)_1 + C_3)(t_3 - t_2)^3 + \cdots = (x_{13}, x_{23}, x_{33})^T$$

Или в явном виде

$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} + \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{pmatrix} \right] (t_3 - t_2) + \frac{1}{2} \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{23} \\ u_{33} \\ 0 \end{pmatrix} \right] (t_3 - t_2)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} \begin{pmatrix} u_{33} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (t_3 - t_2)^3 = X(t_3) = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_{12} + (x_{22} + u_{13})(t_3 - t_2) + \frac{1}{2}(x_{32} + u_{23})(t_3 - t_2)^2 + \frac{1}{6} u_{33}(t_3 - t_2)^3 = x_{13}, \\ x_{22} + (x_{32} + u_{23})(t_3 - t_2) + \frac{1}{2} u_{33}(t_3 - t_2)^2 = x_{23}, \\ x_{32} + u_{33}(t_3 - t_2) = x_{33}. \end{cases}$$

Подзадача 4.

Имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_{14}, \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + u_{24}, \\ \dot{x}_3(t) = u_{34}; \end{cases} \quad X(0)_3 = X(t_3) = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}, \quad X(T) = \begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \\ x_3(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На подинтервале времени $[t_3, T]$ согласно (12)

$$X(t) = X(0)_3 + (B_1 X(0)_2 + C_1)(t - t_3) + (B_2 X(0)_3 + C_2)(t - t_3)^2 + \\ + (B_3 X(0)_3 + C_3)(t - t_3)^3 + \cdots,$$

откуда при $t = T$ имеем следующую систему уравнений

$$X(T) = X(0)_3 + (B_1 X(0)_2 + C_1)(T - t_3) + (B_2 X(0)_3 + C_2)(T - t_3)^2 + \\ + (B_3 X(0)_3 + C_3)(T - t_3)^3 + \cdots = (0,0,0)^T$$

или в явном виде

$$\begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} + \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{14} \\ u_{24} \\ u_{34} \end{pmatrix} \right] (T - t_3) + \frac{1}{2} \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{24} \\ u_{34} \\ 0 \end{pmatrix} \right] (T - t_3)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} \begin{pmatrix} u_{34} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (T - t_3)^3 = X(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$T \to \min_{x_{13}, x_{23}, x_{33}, t_3, T, u_{14}, u_{24}, u_{34}};$$

$$\begin{cases} x_{13} + (x_{23} + u_{14})(T - t_3) + \frac{1}{2}(x_{33} + u_{24})(T - t_3)^2 + \frac{1}{6} u_{34} (T - t_3)^3 = 0, \\ x_{23} + (x_{33} + u_{24})(T - t_3) + \frac{1}{2} u_{34} (T - t_3)^2 = 0, \\ x_{33} + u_{34}(T - t_3) = 0. \end{cases}$$

В итоге совместного рассмотрения всех 4 подзадач и исключения переменных x_{ij}, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$, получим следующую задачу НЛП:

$$T \to \min_{\substack{t_1, t_2, t_3, T, u_{11}, u_{21}, u_{31}, \\ u_{12}, u_{22}, u_{32}, u_{13}, u_{23}, u_{33}, u_{14}, u_{24}, u_{34}, x_{20}, x_{30}}};$$

$$-1+(x_{20}+u_{11})t_1+\frac{1}{2}(x_{30}+u_{21})t_1^2+\frac{1}{6}u_{31}t_1^3+[x_{20}+(x_{30}+u_{21})t_1+\frac{1}{2}u_{31}t_1^2+u_{12}](t_2-t_1)+$$

$$+\frac{1}{2}[x_{30}+t_1u_{31}+u_{22}](t_2-t_1)^2+\frac{1}{6}u_{32}(t_2-t_1)^3+[x_{20}+(x_{30}+u_{21})t_1+\frac{1}{2}u_{31}t_1^2+$$

$$+(x_{30}+t_1u_{31}+u_{22})(t_2-t_1)+\frac{1}{2}u_{32}(t_2-t_1)^2+u_{13}](t_3-t_2)+\frac{1}{2}[x_{30}+u_{31}t_1+$$

$$+u_{32}(t_2-t_1)+u_{23}](t_3-t_2)^2+\frac{1}{6}u_{33}(t_3-t_2)^3+[x_{20}+(x_{30}+u_{21})t_1+\frac{1}{2}u_{31}t_1^2+$$

$$+[x_{30}+u_{31}t_1+u_{22}](t_2-t_1)+\frac{1}{2}u_{32}(t_2-t_1)^2+[x_{30}+u_{31}t_1+(t_2-t_1)u_{32}+u_{23}](t_3-t_2)+$$

$$+\frac{1}{2}u_{33}(t_3-t_2)^2+u_{14}](T-t_3)+\frac{1}{2}[x_{30}+u_{31}t_1+u_{32}(t_2-t_1)+u_{33}(t_3-t_2)+$$

$$+u_{24}](T-t_3)^2+\frac{1}{6}u_{34}(T-t_3)^3=0,$$

$$x_{20}+(x_{30}+u_{21})t_1+\frac{1}{2}u_{31}t_1^2+[x_{30}+u_{31}t_1+u_{22}](t_2-t_1)+\frac{1}{2}u_{32}(t_2-t_1)^2+$$

$$+[x_{30}+u_{31}t_1+u_{32}(t_2-t_1)+u_{23}](t_3-t_2)+\frac{1}{2}u_{33}(t_3-t_2)^2+[x_{30}+u_{31}t_1+$$

$$+u_{32}(t_2-t_1)+u_{33}(t_3-t_2)+u_{24}](T-t_3)+\frac{1}{2}u_{34}(T-t_3)^2=0,$$

$$x_{30}+u_{31}t_1+u_{32}(t_2-t_1)+u_{33}(t_3-t_2)+u_{34}(T-t_3)=0;$$

$$u_{11}^2-1=0,\quad u_{12}^2-1=0,\quad u_{13}^2-1=0,\quad u_{14}^2-1=0,$$

$$u_{21}^2-1=0,\quad u_{22}^2-1=0,\quad u_{23}^2-1=0,\quad u_{24}^2-1=0,$$

$$u_{31}^2-1=0,\quad u_{32}^2-1=0,\quad u_{33}^2-1=0,\quad u_{34}^2-1=0.$$

$$-t_1+v_1^2=0,\quad t_1-t_2+v_2^2=0,\quad t_2-t_3+v_3^2=0,\quad t_3-T+v_4^2=0.$$

Решение этой задачи с 19 ограничениями методом Лагранжа с последующим применением метода, предложенного в работе [11], для решения соответствующей определенной системы нелинейных алгебраических уравнений (с 41 переменными (3 момента переключения, одно время перехода, 12 составляющих управляющих воздействий, 4 неизвестные дополнительные переменные v_i, $i=\overline{1,4}$, 19 неизвестные множители Лагранжа, две неизвестные начальные значения x_{20}, x_{30} переменных состояния $x_2(t)$ и $x_3(t)$)) было получено следующее решение:

$$t_1=0.0000,\quad u_{11}=1,\quad u_{21}=1,\quad u_{31}=1,$$

$$t_2=0.0000,\quad u_{12}=1,\quad u_{22}=1,\quad u_{32}=-1,$$

$$t_3=0.0000,\quad u_{13}=1,\quad u_{23}=-1,\quad u_{33}=-1,$$

$$T=0.6988,\quad u_{14}=1,\quad u_{24}=-1,\quad u_{34}=1,$$

$$x_{20}=0.9431,\quad x_{30}=-0.6989,$$

в правильности которого удостоверились решением следующей задачи с закрепленными краевыми условиями:

$$\begin{cases} x_1(0) = -1, & x_1(T) = 0, \\ x_2(0) = 0.9431, & x_2(T) = 0, \\ x_3(0) = -0.6989; & x_3(T) = 0 . \end{cases}$$

При этом полученное решение точно совпало с решением исходной задачи НЛП.

По полученным результатам на подинтервале $[0,t_1]=[0,0]$ имеем $u_{11}=1, u_{21}=1, u_{31}=1$, на подинтервале $[t_1,t_2]=[0,0]$ - $u_{12}=1, u_{22}=1, u_{32}=-1$, на подинтервале $[t_2,t_3]=[0,0]$- $u_{13}=1, u_{23}=-1, u_{33}=-1$, и наконец, на последнем подинтервале $[t_3,T]=[0,0.6988]$-$u_{14}=1, u_{24}=-1, u_{34}=1$, т.е. в действительности имеем только один подинтервал. Иными словами, управляющие переменные не имеют переключений, следовательно:

$$u_1(t) = u_{14} = 1,$$
$$u_2(t) = u_{24} = -1,$$
$$u_3(t) = u_{34} = 1,$$

а переменные состояния изменяются согласно следующим соотношениям:

$$x_1(t) = 0.1667t^3 - 0.8494t^2 + 1.9431t - 1,$$
$$x_2(t) = 0.5t^2 - 1.6989t + 0.9431,$$
$$x_3(t) = t - 0.6989.$$

Временные зависимости изменения переменных состояния и управляющих переменных представлены на рисунке.

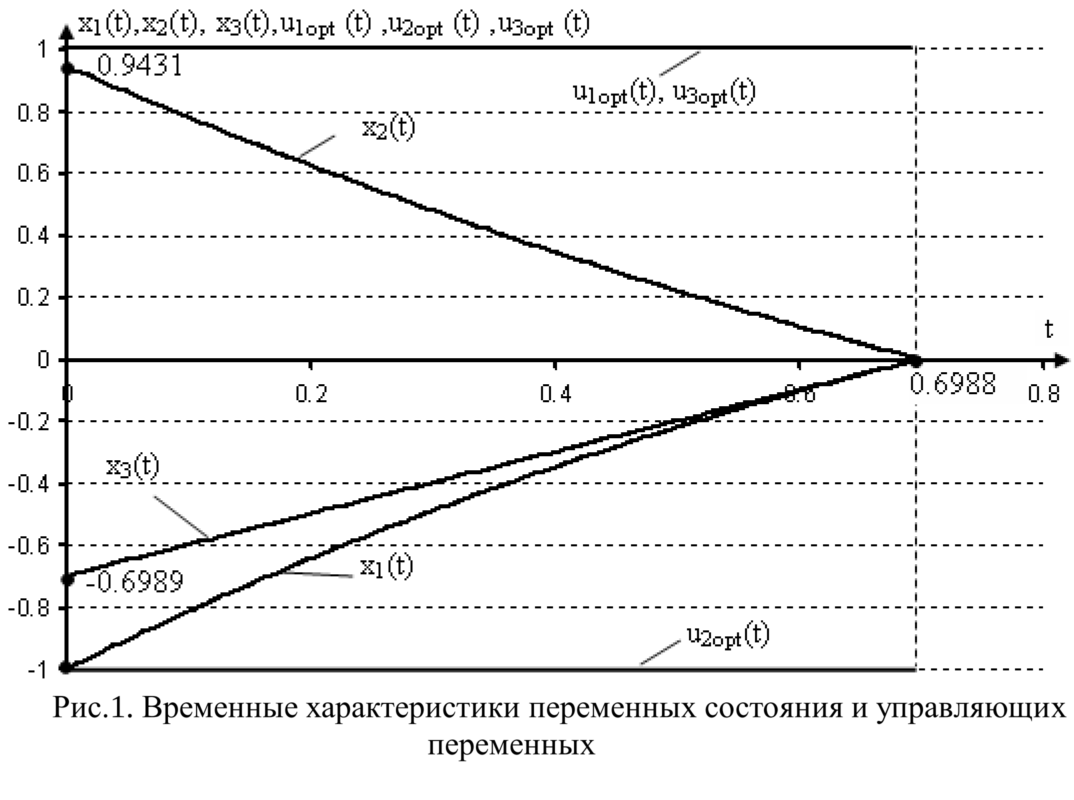

Рис.1. Временные характеристики переменных состояния и управляющих переменных

Обобщение

Итак, для задач оптимального быстродействия данного класса при применении предлагаемого подхода в общем случае

1) не используется принцип max -а, следовательно не используются сопряженные переменные, которые, в общем случае, приводят к сложной, известной в прикладной теории оптимального управления задаче, связанной с определением начальных значений этих сопряженных переменных;

2) не используются условия трансверсальности, которые задаются принципом max -а при решении задач с частично закрепленными краевыми условиями;

3) исходная задача оптимального быстродействия сводится к эквивалентной статической задаче нелинейного программирования, решение которой несравненно проще;

4) легко программируется, поскольку все подзадачи обладают одинаковыми структурами, в которых изменяются соответствующие краевые условия;

5) поскольку все подзадачи в итоге рассматриваются совместно, то размерность полученной эквивалентной задачи достаточно велика. Однако, при наличии современных технических и программных средств и численных методов это обстоятельство не порождает непреодолимых принципиальных затруднений (как в принципе max -а) при решении эквивалентной к исходной окончательной задачи НЛП.

Список литературы: 1. Симонян С.О. Прикладная теория оптимального управления. - Ереван: 2005.-180 с. (на армянском языке). **2.** Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. - М.: Мир, 1972.-554 с. **3.** Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. - 392 с. **4**. Симонян С.О. Основы синтеза специализированных вычислителей динамических задач нелинейного программирования: Автореф. дис. д.т.н. - Ереван, 1993. - 47 с. **5**. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Наука, 1966. - 623 с. **6**. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. - Киев: Наукова думка, 1990. - 184с. **7**. Симонян С.О., Аветисян А.Г. Прямой метод решения линейных многоточечных краевых задач // Известия НАН РА и ГИУА.Сер. ТН. -2002. -Т. LV, N 1. - С.95-103. **8**. Симонян С.О., Аветисян А.Г., Казарян Д.А. Метод решения линейных многоточечных краевых задач, основанный на дифференциально-дирихлеевских преобразованиях // Вестник ИАА.2007. -Т.2. -С 253-257 (на армянском языке). **9**. Симонян С.О., Аветисян А.Г., Казарян Д.А. Метод решения задач оптимального управления, основанный на дифференциальных преобразованиях //Вестник ГИУА. Сер. “Моделирование, оптимизация, управление”. –2007. - Вып.10, т. 2. - С.102-114. **10**. Х. Таха. Введение в исследование операций. – Москва:1985 Том 1. **11.** Simonyan S.H., Avetissyan A.G. Jordanian Reduction of Finite Systems of the Effective Method of their Solution //The Problems of the Efficiency Improvments of the Control Systems of Technological Processes / Armenian National Committee of Automatic Control. - Yerevan, 1992. - Vol. 3.–P. 11.

Сдано в редакцию 14.01.09