

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Латанская Л.А. (НУК, г. Николаев, Украина)

The mathematical model and the calculation method for stress-strained state of three-layered elastic cylindrical shells with piece-homogeneous filler under axisymmetrical impulse loading have been developed on the basis of geometrically non-linear theory of S.P.Timoshenko's type shells. The numerical results of the shells system are presented.

При моделировании динамического поведения слоистых оболочек в рамках прикладных теорий, которые базируются на использовании различных гипотез, существует два основных направления. Первое характеризуется применением метода единых гипотез по толщине для всего пакета слоев оболочки. В данном случае, порядок решаемой системы уравнений не зависит от количества слоев. Второе – базируется на применении независимых кинематических и статических гипотез к каждому слою [2]. При этом порядок решаемой системы уравнений зависит от количества слоев оболочки, что усложняет расчет указанных оболочечных элементов.

Анализ последних исследований и публикаций. Из обзорных работ [1-3, 5, 7] по данной проблеме следует, что при исследовании динамического поведения многослойных конструкций в основном используется первый подход, как более простой, но менее точный. Таким образом, развитие существующих методов расчета нестационарных колебаний трехслойных оболочек при импульсных нагрузках при использовании независимых гипотез к каждому слою и сравнительный анализ полученных результатов представляют собой актуальную проблему механики слоистых оболочечных конструкций.

Целью данной работы является разработка методики расчета и исследование влияния осесимметричной импульсной нагрузки на напряженно-деформированное состояние и несущую способность конструктивно неоднородных трехслойных композитных цилиндрических оболочек с учетом требований контакта слоев по длине конструкции, начальных и граничных условий.

Изложение основного материала. Трехслойная упругая оболочечная система состоит из внешней и внутренней обшивок в виде тонкостенных оболочек, между которыми расположен кусочно-однородный заполнитель (рис.1). В качестве заполнителя служит материал типа пенопласт, физико-механические параметры которого отличаются от соответствующих параметров обшивок.

Построение уточненной математической модели, которая описывает динамические процессы в неоднородной упругой оболочке, базируется на следующих гипотезах. Допускается, что напряженно-деформированное состояние исходной структуры может быть определено в рамках теории оболочек типа Тимошенко для обшивок и кусочно-однородного заполнителя при принятии независимых кинематических и статических гипотез к каждому из слоев с учетом поперечных нормальных и сдвиговых деформаций в заполнителе. Уравнения напряженно-деформированного состояния для каждого слоя принимаются в рамках геометрически нелинейной теории оболочек в квадратичном приближении. Параметры упругости изменяются от слоя к слою, т.е. являются кусочно-непрерывными функциями координаты z .

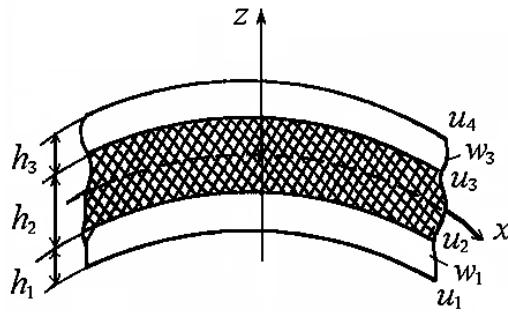


Рис.1. Схематическое изображение элемента трехслойной оболочки

При рассмотрении заполнителя учитывается влияние поперечного нормального напряжения. В теории трехслойных оболочек с кусочно-однородным заполнителем принимаются независимые аппроксимации перемещений и напряжений по толщине соответствующих слоев. При этом, за независимые искомые функции принимаются компоненты вектора перемещений на поверхностях слоев в виде $\bar{U} = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x), w_1(x), w_3(x))^T$, где $u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x), w_1(x), w_3(x)$ – соответствующие продольные и поперечные перемещения на поверхностях слоев.

Для оценки условий потери оболочкой несущей способности используется критерий текучести Мизеса.

В рамках геометрически нелинейной теории оболочек в квадратичном приближении компоненты тензора деформаций обшивок и заполнителя имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{kz} &= \varepsilon_{11}^k + zk_{11}^k, \quad \varepsilon_{22}^{kz} = \varepsilon_{22}^k + zk_{22}^k, \quad \varepsilon_{13}^{kz} = \varphi_1^k + \theta_1^k, \quad \varepsilon_{33}^2 = \varphi_3^2, \\ \varepsilon_{11}^k &= \frac{\partial u_1^k}{\partial x} + \frac{1}{2}(\theta_1^k)^2 + \frac{u_3^k}{R}, \quad \varepsilon_{22}^k = \frac{u_3^k}{R}, \quad k_{11}^k = \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial x}, \\ k_{22}^1 &= k_{22}^3 = 0, \quad k_{22}^2 = \frac{\varphi_1^2}{R}, \quad \theta_1^k = \frac{\partial u_3^k}{\partial x} - \frac{u_1^k}{R}, \quad k = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для вывода уравнений колебаний многослойной оболочки используется вариационный принцип Рейсснера для динамических процессов. После стандартных преобразований, с учетом интегральных характеристик напряжений для обшивок и заполнителя и соотношений деформаций-перемещений, получим систему уравнений колебаний. Таким образом, нестационарные колебания оболочечной системы описываются дифференциальными уравнениями вида:

$$\begin{aligned} L_{3m+1}(\bar{U}) &= \frac{\rho_{2m+1}h_{2m+1}}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_{2m+1} + u_{2m+2}}{2} \right) + \\ &+ (-1)^{m+1} \frac{\rho_{2m+1}h_{2m+1}^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_{2m+2} - u_{2m+1}}{h_{2m+1}} \right), \quad (m = 0; 1); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
L_3(\bar{U}) &= \frac{\rho_{fil}(x)h_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_1+u_2}{2} \right) - \frac{\rho_1 h_1^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_2-u_1}{h_1} \right) + \\
&+ \frac{\rho_{fil}(x)h_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_3+u_2}{2} \right) + \frac{\rho_{fil}(x)h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_3-u_2}{h_2} \right); \\
L_4(\bar{U}) &= \frac{\rho_3 h_3}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_2+u_3}{2} \right) + \frac{\rho_{fil}(x)h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_3-u_2}{h_2} \right) - \\
&- \frac{\rho_3 h_3}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_4+u_3}{2} \right) + \frac{\rho_3 h_3^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{u_4-u_3}{h_3} \right); \\
L_{m+5}(\bar{U}) &= \rho_{2m+1} h_{2m+1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_{2m+1} + \frac{\rho_{fil}(x)h_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{w_1+w_3}{2} \right) + \\
&+ (-1)^{m+1} \frac{\rho_{fil}(x)h_2^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{w_3-w_1}{h_2} \right), \quad (m=0;1);
\end{aligned}$$

где операторы $L_m(\bar{U})$, $m = \overline{1,6}$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
L_{3m+1}(\bar{U}) &= \frac{1}{2A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A_2 T_{11}^{2m+1} \right) - T_{22}^{2m+1} \frac{\partial A_2}{\partial x} \right] - \\
&- (-1)^m \frac{1}{h_{2m+1} A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A_2 M_{11}^{2m+1} \right) - M_{22}^{2m+1} \frac{\partial A_2}{\partial x} \right] + \\
&+ (-1)^m \frac{1}{h_{2m+1}} T_{13}^{2m+1} + \frac{1}{2} \bar{T}_{13}^{2m+1} k_1, \quad (m=0;1); \\
L_{m+1}(\bar{U}) &= \frac{1}{2A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A_2 T_{11}^m \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_2 T_{11}^{m+1} \right) - \left(T_{22}^m + T_{22}^{m+1} \right) \frac{\partial A_2}{\partial x} \right] + \\
&+ \frac{1}{h_m A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A_2 M_{11}^m \right) - M_{22}^m \frac{\partial A_2}{\partial x} \right] - \frac{1}{h_{m+1} A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A_2 M_{11}^{m+1} \right) - M_{22}^{m+1} \frac{\partial A_2}{\partial x} \right] - \\
&- \frac{1}{h_{m+1}} T_{13}^m + \frac{1}{h_{m+1}} T_{13}^{m+1} + \frac{k_1}{2} \left(\bar{T}_{13}^m + \bar{T}_{13}^{m+1} \right), \quad (m=1;2); \\
L_{m+5}(\bar{U}) &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial x} \left[A_2 \left(\bar{T}_{13}^{2m+1} + \frac{1}{2} \bar{T}_{13}^2 \right) \right] - \left(T_{11}^{2m+1} k_1 + T_{22}^{2m+1} k_2 \right) - \\
&- \frac{1}{2} \left(T_{11}^2 k_1 + T_{22}^2 k_2 \right) + (-1)^m \frac{1}{h_2} T_{33}^2 - (-1)^m \frac{1}{h_2} \left(M_{11}^2 k_1 + M_{22}^2 k_2 \right), \quad (m=0;1); \\
\bar{T}_{13}^i &= T_{13}^i + T_{11}^i \theta_1^i, \quad (i=\overline{1,3}).
\end{aligned}$$

Интегральные характеристики напряжений для каждого слоя задаются согласно формулам

$$(T_{11}^k, T_{22}^k, T_{13}^k, T_{33}^2) = \int_z (\sigma_{11}^{kz}, \sigma_{22}^{kz}, \sigma_{13}^{kz}, \sigma_{33}^2) dz, \quad (3)$$

$$(M_{11}^k, M_{22}^k) = \int_z (z^k \sigma_{11}^{kz}, z^k \sigma_{22}^{kz}) dz, \quad k = \overline{1, 3}; \quad z \in [-h/2, h/2].$$

В исходных уравнениях физико-механические параметры заполнителя являются кусочно-однородными по длине конструкции и определяются соотношениями

$$\begin{bmatrix} E_{fil}(x) \\ v_{fil}(x) \\ \rho_{fil}(x) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N [\eta(x - x_i) - \eta(x - x_{i-1})] \begin{bmatrix} E_{2i} \\ v_{2i} \\ \rho_{2i} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

В уравнениях (1)–(4) приняты следующие обозначения: A_1, A_2 – коэффициенты Ляме; T_{ij}^k, M_{ij}^k – усилия и моменты сил, действующие в оболочке; k_1, k_2, R – главные кривизны и радиус оболочки; x, z – продольная и нормальная координаты; φ^k – углы поворота нормали к срединной поверхности оболочки относительно координатных осей в соответствующих слоях; h_1, h_2, h_3 – толщины слоев; $\rho_1, \rho_3, \rho_{fil}$ – плотность материала внешних слоев и заполнителя; $\eta(x)$ – функция Хевисайда; σ_{ij}^{kz} – напряжения в соответствующих слоях; $E_{2i}, v_{2i}, \rho_{2i}$ – физико-механические характеристики области однородного заполнителя; x_i – линии контакта заполнителя; x_0 и x_N – линии границ оболочки.

Основной особенностью уравнений колебаний (2) есть геометрическая нелинейность. Таким образом, полученная математическая модель представляет собой гиперболическую нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных, которая дополняется соответствующими краевыми и начальными условиями и условиями контакта слоев заполнителя по длине оболочки.

В основу построения численного алгоритма решения положен один из вариантов конечно-разностной аппроксимации уравнений колебаний (2) по пространственным координатам и явная конечно-разностная схема по временной координате, которая нуждается в ограничении на шаги разностной сетки [3, 6]. Необходимое условие устойчивости разностных схем выражается зависимостью [3]

$$\Delta t \geq 2/\omega_{\max}, \quad (5)$$

где $\omega_{\max} = \max(\omega_0)$ – максимальные частоты собственных колебаний соответственно обшивок оболочки и заполнителя; Δt – величина шага по временной координате. Максимальные собственные частоты отвечают поперечным сдвиговым колебаниям оболочечной системы. При толщине оболочки менее размера пространственных разностных шагов условие устойчивости (5) приводит к снижению эффективности использования явной разностной схемы и требует увеличения шага интегрирования методом регуляризации [3].

Такой подход разрешает сохранить дивергентную форму разностного представления разрешающих уравнений и обеспечить выполнение закона сохранения полной механической энергии оболочечной системы на разностном уровне.

В матрично-векторном виде разностные уравнения (2) представляются зависимостью

$$[D]\bar{U} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} = [M]^{-1} \bar{F}(t),$$

где $[D]=[M]^{-1}[C]$ – обобщенная матрица; $[C]$ и $[M]$ – матрицы жесткости и масс дискретной разностной системы; \bar{U} и $\bar{F}(t)$ – векторы дискретных перемещений и внешней нагрузки.

Анализ результатов численных исследований. Рассмотрим задачу исследования нестационарных колебаний трехслойной цилиндрической консольно закрепленной оболочки с кусочно-однородным заполнителем, на внутреннюю поверхность которой действует нормально распределенная импульсная нагрузка. Расчеты проводились для модели, построенной согласно теории неоднородных по толщине оболочек типа Тимошенко, а именно: с использованием независимых кинематических и статических гипотез к каждому слою.

Приняты следующие геометрические и физико-механические параметры внешних слоев с толщинами h_1, h_3 и заполнителя с толщиной h_2 : $h_1 = h_3 = 10^{-3}$ м; $h_2/h_1 = 8$; $h = h_1 + h_2 + h_3$; $R/h = 10$; $L/R = 4$; $E_1^1 = E_2^1 = 70$ ГПа; $E_1^3 = E_2^3 = E_1^1$; $v_1^1 = v_2^1 = 0,33$; $v_1^3 = v_2^3 = v_1^1$; $\rho_1 = \rho_3 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $E_1^2 = E_2^2 = E_1^1/100$; $\rho_2 = 3 \cdot 10^2$ кг/м³. В областях $0 \leq x \leq L/4$ и $3L/4 \leq x \leq L$ полагалось $E_1/E_{fil} = 100$, $\rho_1/\rho_{fil} = 4$. В области $L/4 \leq x \leq 3L/4$ полагалось $E_1/E_{fil} = 500$, $\rho_1/\rho_{fil} = 8$. Параметры E_1^1 , ρ_1 соответствуют физико-механическим характеристикам материала обшивок, а E_{fil} , ρ_{fil} – заполнителю.

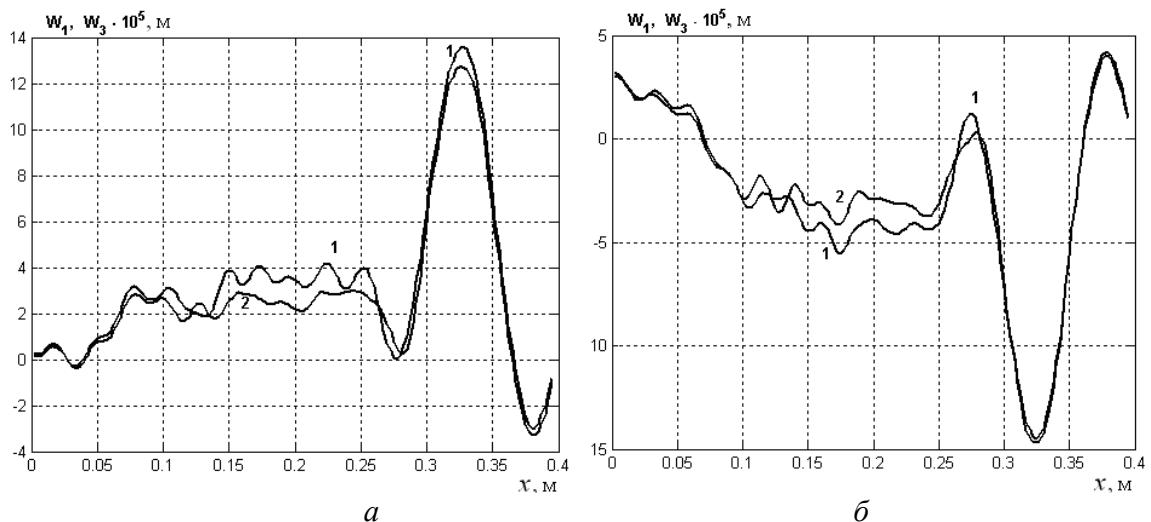


Рис.2. Зависимость величины прогибов w_1 и w_3 во внешних слоях по длине оболочки в разные моменты времени

Осьсимметрично распределенная импульсная нагрузка задана в виде

$$F(t) = A \sin(\pi t/T) [\eta(t) - \eta(t-T)],$$

где A – амплитуда нагрузки; $\eta(t)$ – функция Хевисайда; T – продолжительность нагрузки; t – время. Принятые параметры нагрузки: $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с.

Рассмотрены различные варианты напряженно-деформированного состояния при нестационарном поведении оболочек при заданной нагрузке на исследуемом интервале времени $0 \leq t \leq 40T$.

На рис. 2 *a, б* представлены характерные распределения величин прогибов w_1 и w_3 в обеих обшивках (кривая 1 – для внутренней обшивки, кривая 2 – для внешней обшивки) по пространственной координате x в разные моменты времени. Прогибы оболочки отвечают моментам времени $t = 7,5T$ и $t = 9T$, когда соответствующие величины достигают максимальных значений.

Для напряжений в окружном направлении σ_{22} в срединной поверхности заполнителя четко проявляются области заполнителя с разными физико-механическими свойствами (рис. 3). Кривая 1 отвечает колебаниям в момент времени $t = T$, кривая 2 – в момент времени $t = 2,5T$ (время достижения максимальных напряжений). В области $L/4 \leq x \leq 3L/4$ наблюдаются высокочастотные колебания, которые объясняются влиянием поперечного нормального напряжения σ_{33} и соответственно нормальных поперечных деформаций в исходных уравнениях колебаний.

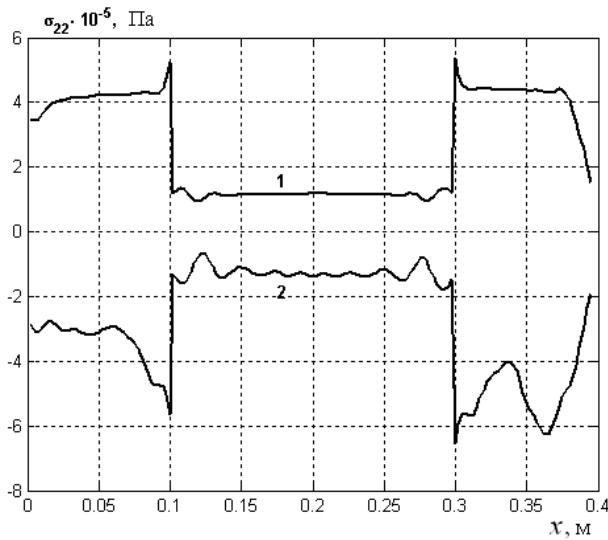


Рис.3. Величина напряжений σ_{22} в срединной поверхности заполнителя по длине оболочки

Графическое представление позволяет анализировать качественное и количественное распределение величин прогибов w_1 , w_3 и напряжений σ_{22} по длине оболочки. Как и в

случае цилиндрической оболочки с жестко защемленными краями [4], в полученных результатах четко проявляется область с заполнителем $E_1/E_{fil} = 500$ – $L/4 \leq x \leq 3L/4$. В областях $0 \leq x \leq L/4$ и $3L/4 \leq x \leq L$ величины прогибов для внутренней обшивки и внешней обшивки практически совпадают. Разность проявляется только в области $L/4 \leq x \leq 3L/4$.

Анализируя приведенные зависимости можно сделать вывод, что максимальные значения величины напряжений σ_{22} в заполнителе согласно теории с использованием независимых гипотез к каждому слою в 1,5-2 раза больше соответствующих величин согласно теории с использованием единых гипотез по толщине ко всему пакету слоев. Отметим, что качественный характер поведения величины σ_{22} в заполнителе по длине конструкции (процесс волнообразования) сохраняется аналогичным характеру поведения величин прогибов и деформаций w_2 и ε_{22} .

Выводы. Впервые комплексно рассмотрены осесимметричные нелинейные задачи динамического поведения трехслойных оболочек вращения с кусочно-однородным заполнителем при нестационарных нагрузках с учетом поперечного обжатия.

Разработана эффективная уточненная математическая модель и численная методика решения задач данного класса, которые базируются на применении интегро-интерполяционного метода построения кончено-разностных схем.

Исследовано напряженно-деформированное состояние слоистых композитных цилиндрических оболочек вращения с учетом структуры материала при осесимметричном импульсном нагружении и предложены пути повышения несущей способности оболочечных систем.

Список литературы. 1. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с. 2. Болотин В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. 3. Луговой П.З. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Э.А. Штанцель. – К: Знание, 2005. – 538 с. 4. Мейш В.Ф. Осесимметричные колебания трехслойных цилиндрических оболочек с кусочно-однородным заполнителем при нестационарном нагружении / В.Ф. Мейш, Л.А. Латанская // Вісник Донецького університету. Серія А: Природничі науки. Науковий журнал. – Донецьк: ДонНУ. – 2008. – Вип. 1. – С. 161-164. 5. Луговой П.З. Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках // Прикл. механика. – 2001. – Т.37, № 5. – С.44–73. 6. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М: Наука, 1977. – 656 с. 7. Noor A.K. Computational model for high-temperature multilayered composite plates and shells / A.K. Noor, W.S. Burton // Applied Mech. Rev. – 1992. – 45, № 10. – P. 419-446.

Сдано в редакцию 15.01.2009