

# МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ РЕЛЬЕФА ОБРАБОТАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Бельков Д.В. (ДонНТУ, г. Донецк, Украина)

*The methods for the calculation of fractal dimension are proposed. They may be used for the analysis of the superficial rough. The examples of the fractal dimension's calculation are presented in the article.*

## Введение

Поверхность обработанной детали не является идеально ровной и геометрически правильной. Ее рельеф имеет отклонения от номинального, заданного чертежом. Важной микрогеометрической характеристикой является шероховатость поверхности. Она в значительной степени определяет основные эксплуатационные свойства деталей и узлов: износостойкость, сопротивление усталости, коррозионную стойкость и др. Поэтому характеристики шероховатости поверхности должны анализироваться в технологических исследованиях и строго контролироваться в процессе производства.

Шероховатость поверхности при обработке заготовки детали зависит от большого числа технологических факторов, например, скорости резания, качества поверхности инструмента, механических свойств и химического состава материала заготовки. Учесть их влияние на качество обработанной поверхности достаточно сложно. Микрогеометрия поверхности является результатом действия совокупности процессов, характеризующих динамическую систему [1].

Традиционные методы анализа физически реализованных временных рядов, порождаемых сложными динамическими системами, в основном базируются на различных вариантах спектрально-корреляционных методов. При этом, вследствие статистического подхода к анализу сигналов динамическая сущность процессов их порождающих, как правило, уходит на второй план.

Без методики оценки топографических свойств поверхности и ее геометрических характеристик, адекватно отражающей реальные процессы формирования поверхностного рельефа, невозможно с удовлетворительной достоверностью предсказать поведение этой поверхности в процессе эксплуатации детали или изделия. Особая заинтересованность в такой оценке проявляется в прогнозировании эксплуатационных характеристик сложных технических систем с повышенными требованиями по надежности и безопасности функционирования.

Возникает задача разработки новых подходов к оценке шероховатости. Одним из них является использование теории фракталов и фрактальной размерности, в качестве оценочного количественного параметра. Такой подход, позволит оценить шероховатость поверхности независимо от формы ее элементов и плотности их распределения, что придаст бы этой оценке свойство универсальности [2].

Фракталы это структуры, которые, несмотря на свою крайнюю нерегулярность, на разных масштабах выглядят примерно одинаково. Мультифракталы - неоднородные фрактальные объекты для полного описания которых, в отличие от регулярных фракталов, недостаточно введения всего лишь одной фрактальной размерности, а необходим спектр таких размерностей. Причина этого заключается в том, что наряду с чисто геометрическими характеристиками такие фракталы обладают и некоторыми статистическими свойствами.

Фрактальная размерность  $D$  временного ряда связана с показателем степени его фрактальности (показателем Херста)  $H$  формулой  $H = 2 - D$ . Параметры самоподобия  $H$  и  $D$  представляют собой меры устойчивости статистического явления или меры

длительности долгосрочной зависимости стохастического процесса. Значения  $H=0,5$  или  $D=1,5$  указывают на отсутствие долгосрочной зависимости. Корреляция между событиями отсутствует. Ряд является случайным, а не фрактальным. Чем ближе значение  $H$  к 1, тем выше степень устойчивости долгосрочной зависимости. При  $0 \leq H < 0,5$  временной ряд является трендонеустойчивым. Он более изменчив, чем случайный ряд, поскольку состоит из частых реверсов спад-подъем. При  $0,5 < H \leq 1$  ряд трендонеустойчив. Тенденция его изменения может быть спрогнозирована.

Фрактальный анализ поверхностей различной природы был проведен в работах [3-4]. На основе экспериментальных результатов доказано существование на уровне микрорельефа обработанной поверхности фрактальных кластеров. В работе [2] на примере точения было показано, что микрорельеф поверхности (среднеарифметическое значение,  $R_a$ ) является фрактальным и выполнен его R/S-анализ для определения показателя Херста.

Целью данной работы является определение фрактальных характеристик ( $H$  и  $D$ ) временного ряда методами агрегирования, которые могут быть использованы при исследовании микрорельефа поверхности. Их применение показано на конкретном примере.

Задачи работы:

1. Сформулировать свойства фрактальных процессов;
2. Определить степень фрактальности микрорельефа поверхности методом агрегирования;
3. Определить фрактальную размерность микрорельефа поверхности методом агрегирования;
4. Определить вероятностное распределение микрорельефа поверхности.

### **Математическое описание дискретного фрактального процесса**

Существует два класса фрактальных процессов, так называемые точно самоподобные и асимптотически самоподобные процессы. Процесс  $X$  называется точно самоподобным с параметром  $\beta$  ( $0 < \beta < 1$ ), если выполняются следующие условия:

1.  $D_m = D / m^\beta$ ,  $D$  - дисперсия процесса  $X$ ,  $D_m$  - дисперсия агрегированного процесса  $X^{(m)}$ , полученного уменьшением размера шкалы наблюдений  $X$  в  $m$  раз.
2. Автокорреляционная функция (АКФ) сохраняется на всех масштабах:  $R(k, X^{(m)}) = R(k, X)$ .

Процесс  $X$  называется асимптотически самоподобным если для больших  $k$  выполняются условия:

1.  $D_m = D / m^\beta$ ,  $D$  - дисперсия процесса  $X$ ,  $D_m$  - дисперсия агрегированного процесса  $X^{(m)}$ , полученного уменьшением размера шкалы наблюдений  $X$  в  $m$  раз. Параметр  $\beta$  связан с параметром Херста  $H$  соотношением  $\beta = 2(1 - H)$ .
2. Автокорреляционная функция (АКФ) сохраняется при  $m \rightarrow \infty$ :  $R(k, X^{(m)}) \rightarrow R(k, X)$ .

Наиболее точным свойством самоподобных процессов является то, что АКФ не вырождается при  $m \rightarrow \infty$ , в отличие от стохастических процессов, где  $R(k, X) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ .

### **Метод агрегирования-1**

Пусть исходный ряд показан на рисунке 1.

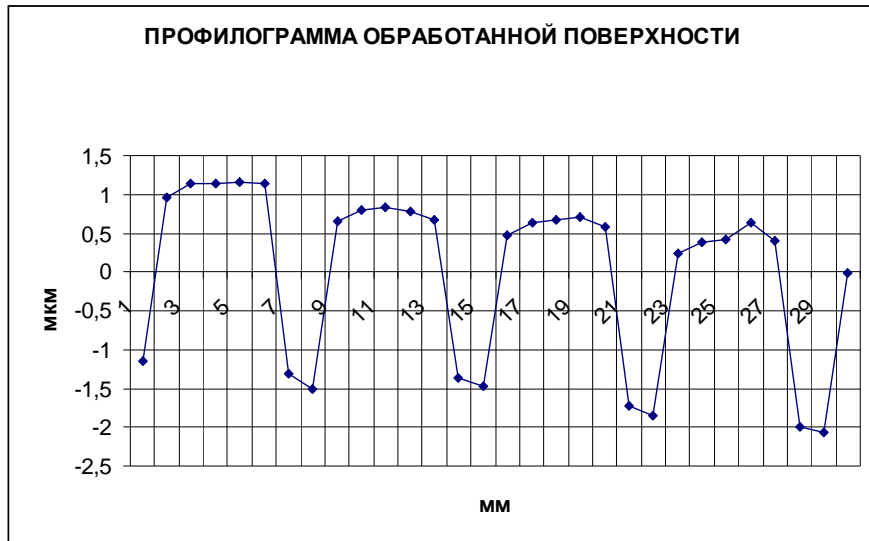


Рис. 1. Исходный ряд

Для него осуществлен следующий агрегационный процесс. Выполнено уменьшение размера шкалы наблюдений в 2 раза. Для этого сформирован новый ряд, полученный при помощи операции нахождения среднего каждой двух последовательных исходных наблюдений. Полученный ряд состоит из 15 событий. Произошло уменьшение рассматриваемой шкалы в 2 раза: каждое единичное деление новой шкалы содержит 2 единицы исходной. Затем аналогично выполнено уменьшение размера исходной шкалы наблюдений в  $m$  раз, для  $m=3$ ,  $m=5$ ,  $m=6$  и  $m=10$ . Каждое деление новой шкалы содержит  $m$  единиц исходной. Полученные агрегированные ряды показаны на рисунке 2. Их структура подобна структуре исходного ряда.

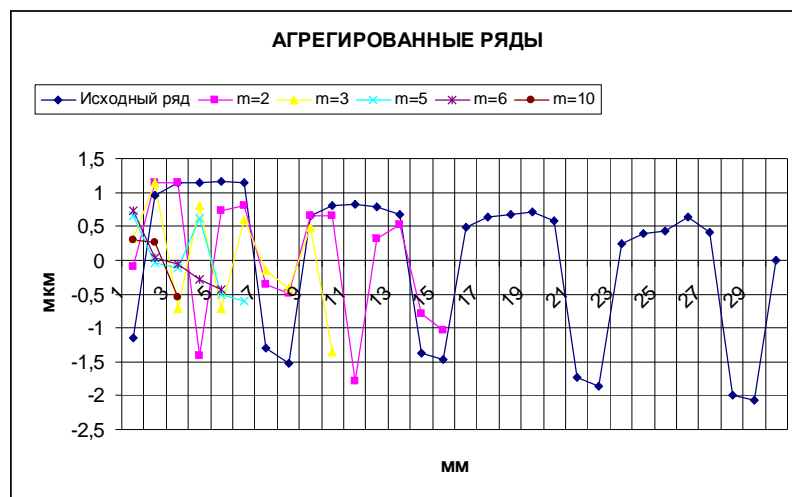


Рис. 2. Агрегированные ряды

Согласно определению самоподобного процесса, имеет место следующее соотношение дисперсий временных рядов:

$$D_{X^m} = \frac{D_X}{m^\beta} \quad (1)$$

Логарифмируя выражение (1), получим:

$$\ln(D_{X^m}) = \ln(D_X) - \beta \cdot \ln(m) \quad (2)$$

Поскольку  $\ln(D_X)$  является константой, не зависящей от  $m$ , то график зависимости  $\ln(D_X)$  от  $\ln(m)$  представляет собой прямую с наклоном, равным  $(-\beta)$ . Построив график зависимости (2) и линию тренда, как показано на рисунке 3, определим аппроксимированное значение  $\beta$ :  $\beta = 0,3813 \approx 0,38$ . Учитывая, что параметр  $\beta$  связан с показателем Херста  $H$  как  $H = 1 - \frac{\beta}{2}$ , получим значение  $H$ :  $H = 0,81$ . Фрактальная размерность  $D$  временного ряда в таком случае:  $D = 2 - H = 2 - 0,81 = 1,19$ . Поскольку  $H > 0,5$ , то степень устойчивости долгосрочной зависимости исследуемого временного ряда выше среднего и ряд является самоподобным (фрактальным).

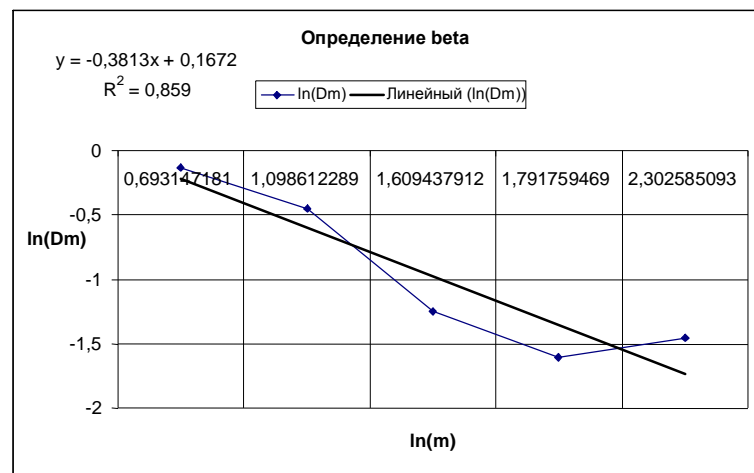


Рис. 3. Линия тренда для определения  $\beta$

### Метод агрегирования-2

Как и в предыдущем разделе, получим агрегированные временные ряды, в которых одно деление новой шкалы содержит  $m$  единиц исходной. Для каждого временного ряда вычислим коэффициенты вариации по формуле (3), где  $D_m$  - дисперсия,  $\mu$  - среднее значение, одинаковое для всех рядов.

$$CV_m = \frac{(D_m)^{0,5}}{\mu} \quad (3)$$

График зависимости  $\ln(CV_m)$  от  $\ln(m)$  представляет собой прямую с наклоном, равным  $(-\gamma)$ . Фрактальная размерность  $D$  временного ряда равна  $D = 1 + \gamma$ . Построив график зависимости и линию тренда, как показано на рисунке 4, определим аппроксимированное значение  $\gamma$ :  $\gamma = 0,194$ . Следовательно,  $D = 1 + 0,194 = 1,194$  и  $H = 2 - D = 0,806$ . Это примерно соответствует результатам, полученным в предыдущем разделе.

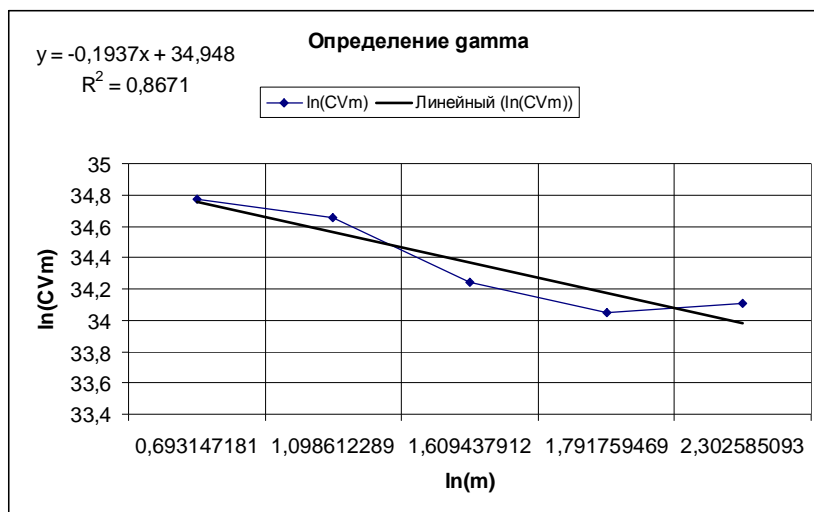


Рис. 4. Определение  $\gamma$

### Оценка тяжести хвоста вероятностного распределения

Тяжелый хвост вероятностного распределения случайной величины может быть свидетельством фрактальности временного ряда. Распределение имеет тяжелый хвост, если выполняется условие (4):

$$P[X > x] \sim x^{-\alpha}, 0 < \alpha < 2 \quad (4)$$

Простейшим распределением с тяжелым хвостом является распределение Парето, для которого функция плотности распределения имеет вид  $p(x) = \alpha k^{-\alpha-1}, \alpha, k > 0, x \geq k$  и

$$\text{функция распределения } F(x) = P[X \leq x] = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha.$$

Чтобы оценить тяжесть хвоста для имеющихся данных, разделим диапазон данных на 10 непересекающихся интервалов, вычислим частоты попадания в каждый интервал, вычислим функции распределения  $F(x)$  и  $1 - F(x)$ . График дополнительной функции распределения  $1 - F(x)$  в логарифмической шкале показан на рисунке 5.



Рис. 4. Тяжелый хвост

Построив линию тренда, как показано на рисунке 6, получим тангенс угла ее наклона к горизонтальной оси. Он является оценкой тяжести хвоста распределения и равен  $-\alpha$ . В данном случае  $\alpha$  принимает значение равное 1,354, попадает в промежуток от 0 до 2, следовательно, распределение имеет свойство тяжелого хвоста.

Показатель Херста  $H$  связан с  $\alpha$  по формуле  $H = \frac{3-\alpha}{2}$ . Вычислив  $H$ , получим

$H = \frac{3-1,354}{2} = 0,823$ , что примерно соответствует результатам, полученным в предыдущих разделах.

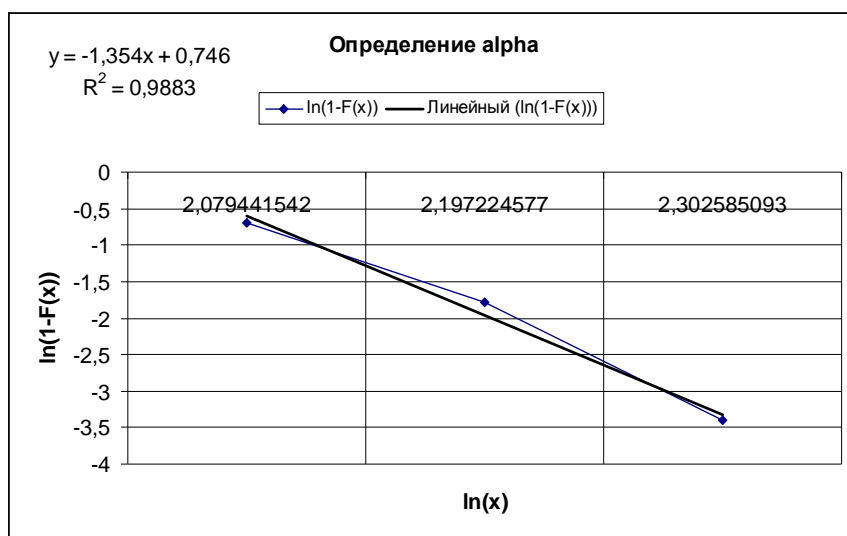


Рис. 5. Определение  $\alpha$

### Выводы

Теория фракталов служит базой для количественного описания диссипативных структур, формирующихся в условиях далеких от равновесных. Такие структуры формируются на поверхности при физико-химических методах обработки и применении нанотехнологий. Рассмотренные в статье методы определения фрактальных характеристик динамических рядов могут быть использованы для количественной оценки шероховатости поверхности в современных методах исследования поверхностей, например, сканирующей зондовой микроскопии.

**Список литературы:** 1. Фрактальные свойства микрогеометрии обработанных поверхностей. // [http://www.masters.donntu.edu.ua/2007/mech/majeed/library/st\\_ru.html](http://www.masters.donntu.edu.ua/2007/mech/majeed/library/st_ru.html).  
 2. Назаров Ю.Ф., Ломаев В.И., Спиридонов Е.Н. Применение методов фрактальной геометрии в технологии изготовления деталей из композитных материалов. // <http://www.ihst.ru/personal/akm/11t29.htm>.  
 3. Вячеславова О.Ф. Современные технологии обработки материалов в свете теории фракталов и ее практического приложения. // <http://www.mashin.ru/jurnal/archiv.php?id=15&njro=200602&yy=2006>.  
 4. Вячеславова О.Ф. Компьютерный ретрофиттинг измерений и контроля как элемент информационных технологий. // [http://www.mami.ru/pages/files/sc\\_journal\\_1\(5\)\\_2008.doc](http://www.mami.ru/pages/files/sc_journal_1(5)_2008.doc)

Сдано в редакцию 21.01.2009